I. ÁLXEBRA

1 Matrices

1.1 Concepto de matriz

Def.- Chamamos ***matriz de dimensión nxm*** a un conxunto ordenado de números reais, colocados en *n* filas e *m* columnas:

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$, $\mathbf{a_{ij}}$ é o elemento da fila **i** e a columna **j**.

Exemplo: $A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ -1 & 22 & 14 & 5 \\ 11 & 1 & 8 & 34 \end{pmatrix}$, $a_{13}=-5$, $a_{33}=8$, ...

- Se $m=n$ dise que A é unha ***matriz cadrada de orde n***.

- ***Igualdade de matrices***: Sexan as matrices da mesma dimensión $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$

$$\boldsymbol{A=B \iff a_{ij}=b_{ij}\,,\quad \forall\ i=1,\ \dots,\ n\ \ e\ \ \forall\ j=1,\ \dots,\ m}$$

1.2 Tipos de matrices

- ***Matriz fila*** é aquela que ten só unha fila. *Exemplo:* $A=\begin{pmatrix} 12 & 4 & 23 & -5 \end{pmatrix}$.

- ***Matriz columna*** é aquela que ten só unha columna. *Exemplo:* $A=\begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$.

- ***Matriz trasposta***: Dada unha matriz A, chamámoslle matriz trasposta de A, e representámola por A^t (ou tamén ${}^tA$ ou A^*), á matriz que se obtén de cambiar as filas polas columnas.

Exemplo: Se $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, entón $A^t=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

- ***Matriz simétrica***: Unha matriz cadrada $A=(a_{ij})$ é simétrica se coincide coa súa trasposta.

  Se $A=(a_{ij})$ é simétrica, entón $\mathbf{a_{ij}=a_{ji}}$.

Exemplo: A matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & -5 & 7 \\ -3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ é simétrica.

❝ ***Matriz antisimétrica***: Unha matriz cadrada A = (a_{ij}) dise que é antisimétrica se $\mathbf{a_{ij} = -a_{ji}}$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -6 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ é antisimétrica.

❝ ***Matriz nula (0)*** é aquela que ten todos os elementos igual a cero.

Exemplos: As matrices $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son nulas.

❝ ***Matriz diagonal*** é unha matriz cadrada na que todos os elementos que non están na diagonal principal son ceros.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é unha matriz diagonal.

❝ ***Matriz escalar*** é unha matriz diagonal na que todos os elementos da diagonal principal son iguais.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é unha matriz diagonal.

❝ ***Matriz unidade (ou identidade)*** é unha matriz escalar na que todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

Exemplos: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz unidade de orde 2, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz unidade de orde 3.

❝ ***Matriz triangular*** é unha matriz cadrada na que todos os elementos que están por riba (por baixo) da diagonal principal son iguais a 0.

Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ matriz triangular superior, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ matriz triangular inferior.

❝ ***Matriz escalonada*** é unha matriz que cumpre as dúas condicións seguintes:

i) Todas as filas de ceros, se as hai, están na parte inferior da matriz.

ii) O primeiro elemento non nulo (de esquerda a dereita) da cada fila está situado máis á dereita que o primeiro elemento non nulo da fila inmediata superior.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.2 Operacións con matrices

1.2.1 Suma e diferenza de matrices

P A ***suma*** *de dúas matrices* $A=\left(a_{ij}\right)$ *e* $B=\left(b_{ij}\right)$ *da mesma dimensión*, é outra matriz $C=\left(c_{ij}\right)$ da mesma dimensión tq.

$$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,,\quad \forall i,j}$$

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

Propiedades:

i. *Asociativa:* (A + B) + C = A + (B + C).

ii. *Conmutativa: A + B = B + A.*

iii. *Elemento neutro:* A + **0** = **0** + A = A (o elemento neutro da suma é a matriz nula).

iv. *Elemento oposto (ou simétrico):* A + (-A) = -A + A = **0** (a matriz oposta de A é -A).

P A ***diferenza*** de matrices defínese como: $\boxed{A-B=A+(-B)}$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -6 & -5 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ -13 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

1.2.2 Produto dun número real por unha matriz

P *O* ***produto*** *dun número real* ***k*** *por unha matriz* $A=\left(a_{ij}\right)$ *de dimensión nxm***,** é outra matriz da mesma dimensión, que se obtén multiplicando todos os elementos de ***A*** por dito número:

$$\boxed{k\cdot\left(a_{ij}\right)=\left(k\cdot a_{ij}\right),\quad \forall\, i,j}$$

Exemplo: $5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 25 & -15 \\ -35 & 20 & 25 \end{pmatrix}$

Propiedades:

i. *Distributiva respecto da suma de matrices*: k.(A + B) = k.A + k.B.

ii. *Distributiva respecto da suma de números reais*: (k + h).A = k.A + h.A.

iii. *Elemento neutro:* 1.A = A.1 = A.

iv. *"Asociativa mixta"*: (kh).A = k(h.A).

1.2.3 Produto de matrices

P O ***produto*** dunha matriz $A=\left(a_{ij}\right)$ de dimensión $n\times m$ pola matriz $B=\left(b_{ij}\right)$ de dimensión $m\times p$, é outra matriz $C=\left(c_{ij}\right)$ de dimensión $n\times p$, que se obtén de multiplicar os elementos de cada fila da matriz ***A*** polos elementos de cada columna da matriz ***B***:

$$\boxed{c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}}$$

Exemplo: $\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 5 & -5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 2 & 1 & -4\\ -4 & 0 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 3 & 52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 7 & 16 & 42\\ 71 & 3 & 11 & 334\end{pmatrix}$.

Propiedades:

i. *Asociativa:* (A.B).C = A.(B.C).

ii. *Distributiva respecto da suma:* A.(B + C) = A.B + A.C.

iii. Sexa A matriz cadrada de orde n: *Elemento neutro* I_n , A . I_n = I_n .A = A.

iv. En xeral non se verifica a propiedade conmutativa: A.B ... B.A.

Exemplo: $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33 & 11\\ 15 & 5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 8\\ 17 & 4\end{pmatrix}$.

v. ***Matriz inversa***: Dada unha matriz cadrada ***A*** de orde ***n*** dise que é ***regular*** se existe unha matriz ***B*** tq A.B é igual a matriz unidade. A matriz B chámase ***inversa*** de A e represéntase por ***A***$^{-1}$. $\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$ (Non todas as matrices cadradas teñen inversa).

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$ inversa de A: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}$

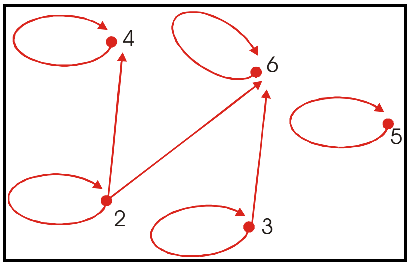
$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

vi. Se A e B son dúas matrices cadradas que posúen inversa, entón a produto $A\cdot B$ tamén ten inversa e, ademais: $\boxed{(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}}$.

vii. Se A e B son dúas matrices coas dimensións adecuadas para que o produto teña sentido, entón: $\boxed{(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t}$.

1.3 Matriz asociada a un grafo

“ Unha das aplicacións máis importante das matrices é o estudo das relacións entre os distintos elementos dun conxunto.



Consideremos o conxunto de números $N = \{2,3,4,5,6\}$ e a relación R: “é múltiplo de”. Podemos representar a relación R mediante un esquema que recibe o nome de ***grafo***:

É posíbel asociar unha matriz a este grafo do xeito seguinte: Escribimos un 1 se o elemento situado á dereita dunha fila é múltiplo do elemento que encabeza unha columna.No caso contrario escribimos un 0.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

2 Determinantes

2.1 Determinantes de segunda orde

Def.- Dada a matriz cadrada de segunda orde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ chamamos ***determinante de A*** ao número real:

$$\det(a)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

O determinante dunha matriz cadrada de segunda orde é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundaria.

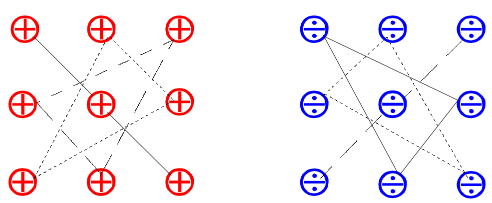
Exemplos: $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3$, $\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-50$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0$

2.2 Determinantes de terceira orde. Regra de Sarrus

Def.- Dada a matriz cadrada de terceira orde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ chamamos ***determinante de A*** ao número real:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

Lembrar a expresión anterior é fácil utilizando a ***regra de Sarrus***:



Os termos positivos son os produtos dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elementos das súas paralelas polo elemento que ocupa o vértice oposto.

Os termos negativos son os produtos dos elementos da diagonal secundaria e os das súas paralelas polo elemento que ocupa o vértice oposto.

Exemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-6$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$

2.3 Determinantes de orde *n*

Def.- Dada a matriz cadrada de orde n $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ chamamos ***determinante de A*** ao número real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

que resulta de facer a suma de todos os produtos de n factores dos cales cada un contén un só elemento de cada fila e un só elemento de cada columna, cada produto terá un signo positivo ou negativo segundo que os índices das dúas permutacións formadas cos subíndices que indican as filas e as columnas dos n factores, sexan da mesma clase ou de clase distinta.

Exemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$, $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$

2.4 Propiedades dos determinantes

P1. O determinante dunha matriz é igual ao determinante da súa trasposta: $\boxed{|A| = |A^t|}$.

Exemplo: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A^t|$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = |A^t|$$

P2. i) $$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 + c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 + c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n + c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2+3 & 4 \\ 5 & 6+7 & 8 \\ 9 & 1+2 & 3 \end{vmatrix} = -108 = -72 + (-36) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1+2 & 7+4 & 8+6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 455 = 315 + 140 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

P3. Se multiplicamos todos os elementos dunha fila ou columna dunha matriz cadrada por un número real, o determinante queda multiplicado por ese número.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 4\times 7 & 8 \\ -3 & 4\times 1 & 9 \\ 5 & 4\times 4 & -1 \end{vmatrix} = 484 = 4 \times 121 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

P4. Se permutamos dúas filas ou dúas columnas dunha matriz cadrada, o determinante cambia de signo.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 140$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -140$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -140$

P5. Se unha matriz cadrada ten unha fila ou unha columna con todos os elementos nulos, o seu determinante vale cero.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

P6. Se unha matriz cadrada ten dúas filas ou dúas columnas proporcionais (en particular, iguais), o determinante vale cero.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$, $F_2 = 2F_1$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $C_3 = 3C_1$.

P7. Se unha fila ou unha columna dunha matriz cadrada é combinación lineal das restantes, o determinante vale cero.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2+3\times7 & 3+3\times5 & 4+3\times2 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $F_2 = F_1 + 3F_3$.

P8. Se sumamos unha fila (ou columna) dunha matriz cadrada a outra paralela, o determinante non varía.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 24 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+4 & 8+5 & 1+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+1 & 3 \\ 4 & 5+4 & 6 \\ 7 & 8+7 & 1 \end{vmatrix}$

P9. Se sumamos unha fila (ou columna) multiplicada por un número a outra paralela, o determinante non varía.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 24 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+2\times4 & 8+2\times5 & 1+2\times6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-3\times1 & 3 \\ 4 & 5-3\times4 & 6 \\ 7 & 8-3\times7 & 1 \end{vmatrix}$.

P10. $\boxed{|A\cdot B| = |A|\cdot|B|}$

Exemplo: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $|A\cdot B| = \begin{vmatrix} 6 & 15 & 4 \\ 12 & 27 & 8 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 12$

Como consecuencia desta propiedade temos que:

$$|A|\cdot|A^{-1}| = |A\cdot A^{-1}| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$$

2.5 Cálculo de determinantes polo método dos adxuntos

Def.- ***Menor complementario*** dun elemento a_{ij} dunha matriz cadrada de orde n é o determinante de orde $n-1$ que resulta de suprimir a fila i e a columna j.

Notación: Menor complementario de a_{ij}: $\boxed{\alpha_{ij}}$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \alpha_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \alpha_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},\ \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\ \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Def.- ***Adxunto*** dun elemento a_{ij} dunha matriz cadrada é o menor complementario de a_{ij} co signo $(-1)^{i+j}$

Notación: Adxunto de a_{ij}: $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}}$

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}5&1&2\\2&1&3\\2&1&1\end{pmatrix}$, $A_{11}=\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}$, $A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}$

$A_{22}=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}5&1\\2&1\end{vmatrix}$, $A_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}5&2\\2&3\end{vmatrix}$, $A_{33}=\begin{vmatrix}5&1\\2&1\end{vmatrix}$

Def.- ***Matriz adxunta de A, Adx(A)***, é a matriz que se obtén ao substituír cada elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ polo seu adxunto $\boldsymbol{A_{ij}}$.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}5&1&2\\2&1&3\\2&1&1\end{pmatrix}$, $Adx(A)=\begin{pmatrix}-2&4&0\\1&1&-3\\1&-11&3\end{pmatrix}$

Teor.- O valor do determinante dunha matriz cadrada A é igual á suma dos produtos dos elementos dunha liña calquera (fila ou columna) de A polos seus adxuntos respectivos. É dicir,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\,; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,; \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Exemplo:
$$\begin{vmatrix}5&1&2\\2&1&3\\2&1&1\end{vmatrix}=-6=\begin{cases}5\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}=-10+4+0=-6\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}5&1\\2&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}5&1\\2&1\end{vmatrix}=0-9+3=-6\end{cases}$$

Unha técnica moi útil para calcular determinantes consiste en facer, utilizando as propiedades dos determinantes, as transformacións necesarias para facer ceros todos os elementos dunha liña (fila ou columna), agás un, para despois desenvolver o determinante polos adxuntos desa liña.

Exemplo:
$$\begin{vmatrix}-1&1&-1&1&-1\\2&-1&1&2&-2\\1&3&2&2&1\\3&-2&2&5&4\\1&4&-6&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-1&1&-1\\0&1&-1&4&-4\\0&4&1&3&0\\0&1&-1&8&1\\0&5&-7&2&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}1&-1&4&-4\\4&1&3&0\\1&-1&8&1\\5&-7&2&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&4&-4\\0&5&-13&16\\0&0&4&5\\0&-2&-18&24\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}5&-13&16\\0&4&5\\-2&-18&24\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}5&-13&16\\0&4&5\\-1&-9&12\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}0&-58&76\\0&4&5\\-1&9&12\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-58&76\\4&5\end{vmatrix}=-1188$$

3 Rango dunha matriz. Matriz inversa dunha matriz cadrada

3.1 Rango dunha matriz. Cálculo

Def.- Chamamos ***rango*** dunha matriz ao número de filas ou columnas linealmente independentes (i.é, que unha non se pode expresar como combinación lineal das demais).

Notación: Rango de A: ***r(A)***.

Exemplo: A matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 7 & 9\end{pmatrix}$ ten rango dous: as dúas primeiras filas son linealmente independentes ($F_1 \neq \lambda F_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$) e a terceira e combinación lineal das dúas primeiras ($F_3 = 2F_1 + 3F_2$).

Teor.- Os vectores fila ou columna dunha matriz cadrada de orde n son independentes.

$\Updownarrow$

O determinante da matriz é distinto de cero.

$\Updownarrow$

A matriz ten rango n.

3.1.1 Cálculo do rango dunha matriz mediante o método de Gauss

Def.- Dise que dúas matrices son ***equivalentes*** por filas (columnas) se unha pode obterse da outra mediante un número finito de operacións elementais entre as filas (columnas). Entendendo por *operacións elementais* as seguintes:

- i) Intercambiar dúas filas.
- ii) Multiplicar unha fila por un número.
- iii) Sumarlle a unha fila outra multiplicada por un número.

Notación: A e B son matrices equivalentes: $A \sim B$.

Teor.- Se dúas matrices son equivalentes teñen o mesmo rango: $\mathrm{A} \sim \mathrm{B} \Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

(Este resultado dedúcese do feito de que as operacións elementais entre filas ou columnas dunha matriz non modifican o rango da mesma).

“ Método de Gauss para o cálculo do rango dunha matriz: Para toda matriz, A, pode encontrarse unha equivalente que sexa escalonada, como esta ten o mesmo rango que A, para calcular o rango de A só temos que achar o da escalonada equivalente o que resulta moi sinxelo, pois: *O rango dunha matriz escalonada por filas (columnas) é igual ao número de filas (columnas) non nulas da matriz*.

Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&5\\4&2&4&-4\\-4&3&2&1\\-4&4&10&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&3&5\\2&4&4&-4\\3&-4&2&1\\4&-4&10&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&3&5\\0&8&10&6\\0&2&11&16\\0&4&22&32\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&3&5\\0&2&11&16\\0&8&10&6\\0&4&22&32\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1&2&3&5\\0&2&11&16\\0&0&-34&-58\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=3$$

3.1.2 Cálculo do rango dunha matriz mediante menores complementarios

Def.- Dada unha matriz de orde *nxm*, chámase ***menor complementario de orde p*** a calquera determinante de orde *p* que pode formarse suprimindo *n-p* filas e *m-p* columnas.

Teor.- O rango dunha matriz é igual á maior orde dos menores complementarios con valor distinto de cero que poden obterse na matriz.

“ Tendo en conta o resultado do teorema anterior para calcular a rango dunha matriz podemos seguir o seguinte procedemento:

- i) Se a matriz non é nula, o seu rango será maior ou igual que 1.
- ii) Para determinar se ten rango 2, búscase un menor de orde 2 que sexa distinto de cero. Senón existe ningún o rango da matriz será 1. Se existe algún o rango será maior ou igual que 2.
- iii) Para determinar se ten rango 3, orlamos de todos os xeitos posíbeis o menor de segunda orde distinto de cero. Se todos os menores obtidos son iguais a cero, o rango da matriz é 2. Se, pola contra, algún deles é distinto de cero, a matriz ten rango maior ou igual que 3.
- iv) Continúase o proceso, tendo en conta que o rango sempre será # Mín(n, m).

Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&2&4\\-6&-2&5&1\\6&2&13&17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&2\\-2&5\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow r(A)\geq 2\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}3&1&2\\-6&-2&5\\6&2&13\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}1&2&4\\-2&5&1\\2&13&17\end{vmatrix}=0\end{array}\right\}\Rightarrow r(A)=2$$

3.2 Matriz inversa dunha matriz cadrada. Existencia e cálculo

“ Dada unha matriz regular A, A^{-1} ***inversa de A*** **}~|** $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

Teor.- Dada unha matriz cadrada A, **existe** $\mathbf{A^{-1}}$ **}~|** **det(A) distinto de 0**

Demostr.-

"**~|**" Se › A^{-1}, $\det(A).\det(A^{-1}) = \det(A.A^{-1}) = \det(I_n) = 1$, entón det(A) ... 0.

"**}~**" Se det(A) ... 0 existe a matriz $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Adx(A^t)}$ que é a inversa de A .

“ O teorema anterior proporciona un método para estudar a existencia da matriz inversa e para o seu calculo cando existe. Para iso procedemos do seguinte xeito:

< Calcular det(A).

< Calcular a matriz trasposta de A.

< Matriz adxunta da trasposta.

< Dividir por det(A).

Exemplo: Para achar a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

< Calculamos o determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, como é distinto de cero está asegurada a existencia da matriz inversa.

< A matriz trasposta é: $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. A matriz adxunta de A^t é: $Adx(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Dividimos por |A| = -1, e temos calculada a matriz inversa de A: $Adx(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

3.2.2 Cálculo da inversa dunha matriz mediante o método de Gauss-Jordan

Para aplicar este método procedemos deste xeito:

— Partimos dunha matriz formada por A e unha matriz identidade da mesma orde que A. Esta matriz denomínase **matriz ampliada** e simbolízase por $(A|I)$:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

— Aplicamos as transformacións elementais adecuadas para chegar a unha matriz $(I|B)$:

$$(I|B)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

A matriz B resulta ser A^{-1}.

Vexamos a aplicación deste método por medio dun exemplo.

Fíxate

Ó aplicar o método de Gauss-Jordan para calcular a inversa dunha matriz A, pode suceder que, ó efectuar algunha das transformacións elementais, se obteñan unha ou máis filas nulas na matriz ampliada $(A|I)$.

Neste caso, a matriz A non ten inversa, é dicir, é singular.

Exemplo

Obtén a matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

— Escribimos a matriz ampliada $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

— Facemos que o elemento a_{11} sexa 1:

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— Facemos que os demais elementos da primeira columna, a_{21} e a_{31}, sexan 0:

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

— Facemos que o elemento a_{22} sexa 1:

$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

— Facemos que o resto dos elementos da segunda columna, a_{12} e a_{32}, sexan 0:

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right)$$

— Facemos que o elemento a_{33} sexa 1:

$$\xrightarrow{F_3 \to -\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

— Facemos que o resto dos elementos da terceira columna, a_{13} e a_{23}, sexan 0.

Así obtemos finalmente a matriz $(I|B)$, na que $B = A^{-1}$:

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_3]{F_1 \to F_1 - 4F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

with the right block $\underbrace{}_{A^{-1}}$

4 Sistemas de ecuacións lineais

4.1 Notación ordinaria

Def.- Unha ***ecuación lineal*** con ***n*** incógnitas é unha ecuación da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reais e os termos variábeis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son todos de 1º grao.

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son os ***coeficientes* das *incógnitas*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- b é o ***termo independente*** da ecuación.

‘ Un *sistema de **m** ecuacións lineais con **n** incógnitas* ten a seguinte expresión

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Def.- Unha ***solución*** dun sistema de m ecuacións con n incógnitas é un conxunto ordenado de n números reais $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ tales que ao substituír as incógnitas ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) por eles verifican as m ecuacións:

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n & = & b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = & b_m \end{cases}$$

Exemplo: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = -1$ é unha solución do sistema: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$, xa que

se verifica: $\begin{cases} 3\times 2 + 1\times 1 - 4\times 0 - 1\times(-1) = 8 \\ 1\times 2 + 4\times 1 + 1\times 0 + 3\times(-1) = 3 \\ 2\times 2 + 1\times 1 - 1\times 0 + 3\times(-1) = 2 \end{cases}$

‘ ***Sistema homoxéneo***: é un sistema no que os termos independentes son todos cero, é dicir,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Os sistemas homoxéneos constitúen un caso especial, xa que sempre admiten polo menos unha solución: a *solución trivial* $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

4.2 Notación matricial

" Un sistema pódese expresar como un produto de matrices:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \quad \text{ZY} \quad \boxed{A \cdot X = B}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ***matriz dos coeficientes***, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ ***matriz das incógnitas***

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ ***matriz dos termos independentes***.

— Unha ***solución*** será unha matriz $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \ldots \\ s_n \end{pmatrix}$ tal que ao substituír X por ela verifica: $A \cdot S = B$

— Tamén é útil a matriz $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ que chamaremos ***matriz ampliada***.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$ pode expresarse: $\underset{\substack{\updownarrow \\ A}}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\updownarrow \\ X}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\updownarrow \\ B}}{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$

A matriz ampliada é: $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$. Unha solución é a matriz: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, xa que se verifica a igualdade: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4.3 Clasificación dos sistemas

" Atendendo ao número de solucións dun sistema denomínase:

P ***Sistema compatíbel*** (S.C.): é un sistema que ten algunha solución.

Exemplo: Para o sistema $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ unha solución é: $x=1,\ y=2$

P ***Sistema incompatíbel*** (S.I.): é un sistema que non ten ningunha solución.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=5 \end{cases}$ non ten, evidentemente, ningunha solución.

P ***Sistema compatíbel determinado*** (S.C.D.): é un sistema que ten unha única solución.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ ten como única solución é: $x=1,\ y=2$

P ***Sistema compatíbel indeterminado*** (S.C.I.): é un sistema que ten infinitas solucións.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$ ten infinitas solucións: $\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 5 \\ 1 & 3 \\ \cdots & \cdots \end{array}$

4.4 Sistemas equivalentes

" Dous sistemas son ***equivalentes*** cando teñen as mesmas solucións.

4.4.1 Propiedades de equivalencia de sistemas

< Se multiplicamos (dividimos) os dous membros dunha ecuación por un mesmo número real distinto de cero, obtemos un sistema equivalente ao primeiro.

< Se a unha ecuación lle sumamos (restamos) outra (ou unha combinación lineal das restantes), o sistema resultante é equivalente.

< Se unha ecuación é combinación lineal das restantes, podemos suprimila e o sistema resultante é equivalente. (En particular, se dúas ecuacións son iguais podemos suprimir unha).

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x+4y-5z=1 \\ 6x-8y+10z=8 \\ 8x-4y+5z=9 \end{cases} \underset{\frac{F_2}{2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+4y-5z=1 \\ 3x-4y+5z=4 \\ 8x-4y+5z=9 \end{cases} \underset{F_3-(F_1+2F_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+4y-5z=1 \\ 3x-4y+5z=4 \\ 0+0+0=0 \end{cases} \underset{F_2+F_1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-5z=1 \\ 5x=5 \end{cases} \underset{\frac{F_2}{5}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+4y-5z=1 \\ x=1 \end{cases}$$

5 Discusión e resolución de sistemas

5.1 Teorema de Rouché-Fröbenius

*Teor.-(**de Rouché-Fröbenius**)*

A condición necesaria e suficiente para que un sistema de m ecuacións lineais con n incógnitas sexa compatíbel (› solución) é que o rango da matriz dos coeficientes, A, sexa igual ao rango da matriz ampliada cos termos independentes, A^*, isto é:

Sistema compatíbel* } ~ | *rango(A) = rango(A*)

Demostr.-

"~ /" ("Necesidade")

Se un sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$ é compatíbel ten como mínimo unha solución, entón existen n números reais $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ tales que ao substituír as incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por eles verifican as m ecuacións, é dicir $\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n & = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = b_m \end{cases}$

substituíndo $b_1, b_2, \ldots, b_n$ na matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \end{pmatrix}$

Na matriz A* a última columna é combinación lineal das restantes, polo tanto o seu rango é igual o da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, entón rango(A) = rango(A*) *c.q.d.*

" } ~" ("Suficiencia")

Supoñamos que *rango(A)* = *rango(A*)* = r, entón en A hai r columnas linealmente independentes, que tamén son columnas de A^*. O resto de columnas de A^* e, en particular, a dos termos independentes son combinación lineal destas r columnas. Polo tanto, a matriz columna de termos independentes é combinación lineal das n columnas de A e o sistema é compatíbel. *cqd*

' Do teorema de Rouché-Fröbenius deducimos un método para a discusión dos sistemas lineais:

$$\begin{array}{ll} rango(A) = rango(A^*) & \left\{ \begin{array}{lll} rango(A) = n & \Leftrightarrow & \text{S. C. D.} \\ & & \\ rango(A) < n & \Leftrightarrow & \text{S. C. I.} \end{array} \right. \\ \Updownarrow & \\ \text{S. C.} & \\ & \\ rango(A) < rango(A^*) \quad \Leftrightarrow \quad \text{S. I.} & \end{array}$$

Sistemas homoxéneos:

Para os sistemas homoxéneos $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$ *rango(A)* sempre é igual ao *rango(A*)*, e sempre existe unha solución: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ esta solución chámase ***trivial*** ou ***impropia***.

A condición necesaria para que un sistema homoxéneo teña solucións (infinitas) distintas da trivial é que: ***rango(A) < n*** (nº de incógnitas).

5.2 Método da matriz inversa

" Sexa A a matriz dun sistema de n ecuacións con n incógnitas, se $|A| \neq 0$ (ten inversa), entón o sistema é un S. C. D. e pode resolverse calculando a matriz inversa de A:

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Exemplo: Para o sistema $\begin{cases} x + 3y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 5 \\ -2x + y + z &= 1 \end{cases}$, temos $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$, entón a solución será: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

" Este método pódese aplicar para todos os sistemas de m ecuacións e n incógnitas que sexan compatíbeis. No caso de ser un S.C.D. e haber máis ecuacións que incógnitas eliminanos as ecuacións que sobren (por ser combinación lineal das outras). Se o sistema é S.C.I. (con rango(A)=k), despois de eliminar as ecuacións non necesarias, transformamos o sistema nun equivalente de k ecuacións e k incógnitas de maneira que a matriz deste sistema teña rango k (as n-k incógnitas restantes considéranse como parámetros):

Exemplo: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, rango(A)=rango(A*)<3 Y S.C.I.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 - z \\ 2 - 2z \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - z \\ 2 - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Regra de Cramer

" A regra de Cramer proporciona un método para a resolución de sistemas de n ecuacións e n incógnitas e tales que $|A| \neq 0$, isto é, para resolver S.C.D..

Sexa o sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$ e sexa $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Se $|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$, entón: $A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

como $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

temos que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$, entón $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}}{|A|} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn}}{|A|} \end{cases}$

de onde deducimos as fórmulas da ***regra de Cramer***:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad \ldots \quad , \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Exemplo: Para resolver o sistema: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$, a matriz do sistema é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \quad \Rightarrow$ É un S.C.D. e polo tanto podemos aplicar a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = -1 .$$

5.4 Método de Gauss

" O método de Gauss para resolver un sistema de *m* ecuacións con *n* incógnitas consiste en, facendo transformacións que fagan o sistema resultante equivalente, triangular o sistema, é dicir, conseguir que a primeira ecuación teña *n* incógnitas, a segunda *n-1*, a terceira *n-2*, e así ata chegar a última. Se no proceso anterior algunha ecuación queda da forma $0 = 0$ suprimímola.

Feito o anterior, resolvemos o sistema (se é compatíbel) moi sinxelamente: primeiro a última ecuación, de seguido a penúltima, e así ata a primeira.

Discusión

Despois de facer as transformacións oportunas para triangular o sistema e eliminar as ecuacións da forma $0 = 0$, quedarán *k* ecuacións e *n* incógnitas. Observando este sistema podemos decidir sobre a compatibilidade e o número de solucións:

< Se aparece algunha ecuación da forma $0 = b$, con b … 0, non existe solución: S.I..

Exemplo:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + y - z = -4 \\ 2x + 4y + 6z = 5 \\ 4x + 7y + z = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 0 + -5y - 10z = -22 \\ 0 + 0 + 0 = -7 \\ 4x + 7y + z = 1 \end{cases}$$

< Se ao final queda igual número de ecuacións que de incógnitas, $k = n$, o sistema te solución única: S.C.D..

Exemplo:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + y - z = -4 \\ 2x + 4y + 6z = 12 \\ 4x - 2y + z = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 0 - 5y - 10z = -22 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 - 10y - 11z = -23 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 0 + 5y + 10z = 22 \\ 0 - 10y - 11z = -23 \end{cases} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 0 + 5y + 10z = 22 \\ 0 + 0 + 9z = 21 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{15} \\ y = -\dfrac{4}{15} \\ z = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

< Se queda menor número de ecuacións que de incógnitas, $k < n$, o sistema ten infinitas solucións: S.C.I..

Exemplo:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + 2y - 3z = -6 \\ 2x + 4y + 6z = 12 \\ -4x - 8y - 12z = -24 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 0 - 4y - 12z = -24 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 0 + y + 3z = 6 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 3z - 6 \\ y = -3z + 6 \end{cases}$$

< Se queda maior número de ecuacións que de incógnitas, $k > n$, entón hai ecuacións equivalentes e temos considerar unha soa de entre elas, eliminando as demais. Unha vez feito isto teremos algún dos tres casos anteriores.

Exemplo:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -2 \\ -x + y - 2z = -4 \\ 7x - 7y + 14z = 28 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0 - 2y - 2z = -8 \\ 0 + 2y - z = 2 \\ 0 - 14y + 7z = -14 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0 - 2y - 2z = -8 \\ 0 + 0 - 3z = -6 \\ 0 + 0 + 21z = 42 \end{cases} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0 + y + z = 4 \\ 0 + 0 + 3z = 6 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

5.5 Método de Gauss-Jordan

" Este método é unha variante do método de Gauss e consiste e "diagonalizar" o sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0 + \ldots + 0 &= b_1' \\ 0 + x_2 + \ldots + 0 &= b_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ 0 + 0 + \ldots + x_n &= b_n' \end{cases}$$

Cando teñamos "diagonalizado" o sistema tamén o teremos resolto.

Exemplo:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0 - 2y + z = -1 \\ 0 + 2y - 2z = -2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0 - 2y + z = -1 \\ 0 + 0 + z = 3 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x + y + 0 = 3 \\ 0 - 2y + 0 = -4 \\ 0 + 0 + z = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y + 0 = 3 \\ 0 + y + 0 = 2 \\ 0 + 0 + z = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 0 + 0 = 1 \\ 0 + y + 0 = 2 \\ 0 + 0 + z = 3 \end{cases}$$

5.6 Discusión de sistemas de ecuacións con parámetros

" A miúdo os coeficientes dun sistema de ecuacións lineais preséntanse dependendo dun parámetro (ou varios). Trátase, entón, de achar os valores numéricos do parámetro (parámetros) que fan que o sistema teña solución única, infinitas solucións ou ningunha solución.

Para isto estúdase o rango da matriz dos coeficientes e o rango da matriz ampliada, aplícase o teorema de Rouché-Fröbenius para discutir a solución en cada un dos casos posíbeis que se corresponden aos distintos valores do parámetro (parámetros).

Exemplo: Discutir segundo os valores do parámetro a o sistema: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2, \quad a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

< Para a … 1 e a … -2, rango(A) = 3 = rango(A*) = nº de incógnitas ~ | S. C. D..

< Para a = 1, rango(A) = 1 = rango(A*) < nº de incógnitas ~ | S. C. I..

< Para a = -2, rango(A) = 2 … 3 = rango(A*) ~ | S. I..