Exercicios e problemas

1. Escribir unha matriz de dimensión 4x3 tal que $a_{ij} = i + j$.

2. Indicar a dimensión da seguinte matriz e identificar os elementos a_{12}, a_{23} e a_{32} $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

3. Escribir :

a) Unha matriz de dimensión 3x3 e triangular superior.

b) Unha matriz de dimensión 4x4 triangular inferior.

c) Unha matriz diagonal de 4x4.

d) A matriz nula de dimensión 3x4.

4. Se A.B = C, a matriz B ten dimensión 4x3 e a matriz C ten dimensión 5x3. Que dimensión ten A?

5. Dadas as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Cantos produtos poden facerse?. Dicir cales.

b) Calcular: 3.A, B.A, B.A+2.B e $A.B^t$.

6. Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, buscar unha matriz X que verifique: $3X - 2A = 5B$.

7. Como teñen que ser as matrices A e B para poder efectuar os produtos A.B e B.A .

8. Dada unha matriz A calquera, existe unha matriz B, tq o produto A.B , ou ben B.A, sexa unha matriz dunha soa fila? *(Razoa a resposta).*

9. Existe unha matriz B tal que o produto A.B sexa unha matriz de tres filas, sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

10. Sexan A, B e C tres matrices cadradas de dimensión nxn e tq A.B = A.C. Que condición ten que cumprir A para que podamos deducir que B = C?. Pon un exemplo para o cal non se verifica.

11. Comprobar cun exemplo que o produto de dúas matrices diagonais é outra matriz diagonal.

12. Sexa A unha matriz diagonal de orde 3:

a) Que condición deben cumprir os elementos de A para que admita inversa?

b) E cales para que dita inversa coincida con A?

13. Sexan P e Q dúas matrices cadradas de orde n que teñen inversa: P^{-1} e Q^{-1}. Ten inversa a matriz PQ?

14. Cantos elementos nulos pode ter unha matriz de orde 3, sen que o det. sexa cero?

15. Unha matriz cadrada A verifica que $A^2 = A$. Que valores pode tomar det(A)? *(Xustificar a resposta).*

16. Supoñamos que C_1, C_2, C_3 e C_4 son as catro columnas dunha matriz cadrada A e que o determinante de A vale 3. Calcular razoadamente:

a) O determinante da matriz inversa de A.

b) O determinante da matriz 2A.

c) O determinante da matriz formada polas columnas: $2C_1$-C_3, C_4, $5C_3$, C_2 .

17. Sexan P e Q dúas matrices cadradas $n \times n$. Baixo que condicións se verifica a igualdade $(P+Q)(P-Q) = P^2 - Q^2$.
Comprobar se se verifica a igualdade anterior para as matrices: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Obter os valores x, *y,* z que verifican a seguinte ecuación matricial $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

19. Resolver a ecuación matricial $A.X + B = C.D$ sendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

20. Encontrar unha matriz X tq $A.X + B = C$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$. Pódese calcular algunha matriz Y tal que $YA + B = C$?

21. Sexa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ demostrar que $A^n = 2^{n-1}A$.

22. Calcular a matriz $M = P^2 - 3P - 2I$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Calcular os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -21 & -6 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

24. Considéranse dúas matrices A e B que verifican $A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Calcular A^2-B^2.

25. Razoar se é certo que $(A+B)^2=A^2+B^2+2\,A\,B$, para dúas matrices cadradas calquera, A e B.

26. Calcular a potencia n-ésima das matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

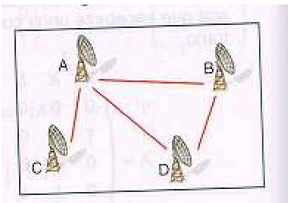
$$C=\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}$$ (sendo k un número real calquera).

27. Localizar o erro existente na resolución da seguinte ecuación matricial, na que A, B e X son matrices cadradas da mesma orde.

$$A\cdot X=B$$
$$A^{-1}\cdot A\cdot X=B\cdot A^{-1}$$
$$X=B\cdot A^{-1}$$

28. Representar por medio dun grafo a relación R: "é maior que" no conxunto $C=\{-3,0,1,5,6\}$. Obter a matriz asociada ao grafo anterior.

29. O grafo da figura representa as conexións entre os elementos que forman un sistema de radiocomunicación.



a) Escribir a matriz asociada ao grafo.

b) Calcular o número de camiños de comunicación en dúas etapas entre cada par de elementos.

30. Na seguinte táboa indícase a audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadeas de TV (A, B, C) nunha determinada semana e en cada un dos tres segmentos horarios (Maná: M, Tarde: T e Noite: N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

Sen embargo, como consecuencia da calidade dos programas emitidos, produciuse na audiencia prevista (e en todos os segmentos horarios) unha redución do 10% para a cadea A, unha redución do 5% para a B e un aumento do 20% para a C.

a) Obter a matriz que representa a audiencia das tres cadeas A, B e C nos segmentos horarios M, T e N.

b) Sabendo que o beneficio que obtén cada cadea por espectador é de 3€ pola mañá, 4€ pola tarde e 6€ pola noite, obter mediante cálculo matricial os beneficios para cada unha das tres cadeas.

31. Calcular, por transformacións elementais (sen empregar a regra de Sarrus) e xustificando os pasos, o determinante:

$$\begin{vmatrix}2+a & b & c\\ a & 2+b & c\\ a & b & 2+c\end{vmatrix}.$$

32. Utilizar o método de Gauss para calcular o rango das matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

33. Calcular, utilizando determinantes, o rango das matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & -6 & 15\\ -2 & 4 & -10\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

34. Achar o rango das matrices *A*, *B*, *C* e *D* segundo os valores de *a*:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ a & 5 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}a & a & 1\\ 2a & 2a & 2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & a\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 0 & 9 & 0\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 2\\ 2 & a & a^2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

35. Para que valores de a teñen inversa as matrices: $A=\begin{pmatrix}0&7&5\\3&4&a\\7&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&a&3\\4&1&-a\end{pmatrix}$?

36. Calcular a inversa (se existe) das matrices:

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}10&3&4\\2&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}1&-2&5\\3&-6&15\\-2&4&-10\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix}\cos a&-sen\,a\\sen\,a&\cos a\end{pmatrix}$

37. Calcular a matriz inversa de I-A, sendo $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

e $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

38. Resolver as ecuacións: $\begin{vmatrix}2&5\\2x&x^2\end{vmatrix}=-12$,

$\begin{vmatrix}x&2&x\\1&x&3\\2&1&1\end{vmatrix}=-12$

39. Demostrar que a matriz $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ verifica unha ecuación do tipo $A^2+\alpha A+\beta I=0$, determinando α e β. Utilizar este feito para calcular a inversa de A.

40. Resolver a ec. matricial $3A+BX=C$ sendo:

$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}0&12&15\\12&11&10\end{pmatrix}$

41. Resolver a ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y\\x&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

42. Resolver a ecuación matricial $AX - B = C$ sendo:

$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$.

43. Resolver a ecuación matricial $A^t\cdot X-B=0$ sendo:

$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&4\\5&6\\1&2\end{pmatrix}$

44. Dúas matrices cadradas, A e B, de orde $n\times n$, son semellantes se existe unha matriz invertíbel, P, tal que $B=P^{-1}AP$, onde P^{-1} denota a matriz inversa de P. Determinar se son semellantes as matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

45. Sendo $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ unha matriz triangular invertíbel, demostra que a súa inversa tamén é triangular.

46. Un sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas, pode ter exactamente dúas solucións? *(Razoa a resposta).*

47. Se nun sistema de ecuacións lineais o número de ecuacións é igual ao número de incógnitas, entón o sistema é compatíbel determinado? *(Razoa a resposta).*

48. Se nun sistema de ecuacións lineais o número de ecuacións é maior que o número de incógnitas, entón o sistema é incompatíbel? *(Razoa a resposta).*

49. Un sistema de catro ecuacións e dúas incógnitas pode ser compatíbel determinado? *(Razoa a resposta).*

50. O rango da matriz dos coeficientes dun sistema de tres ecuacións con tres incógnitas é un, que rango pode ter a matriz ampliada? En base a iso cantas solucións ten o sistema?

51. Se o rango da matriz dos coeficientes dun sistema de 4 ecuacións con 4 incógnitas é 3:
- pode ser compatíbel o sistema?
- pode ser compatíbel determinado?
- pode ser incompatíbel?

52. Pode ocorrer que un sistema de ecuacións lineais homoxéneo non teña solución? E, pode ocorrer que teña infinitas solucións? *(Razoa a resposta).*

53. Discutir (Rouché-Fröbenius) e resolver (Cramer) cando sexa posíbel os sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+2y+z=3 \\ x-3y+4z=1 \\ 3x+y+z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+2z=1 \\ z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4x-2y+3z=6 \\ x-2y-3z=5 \\ 3x-6z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y+4z=6 \\ -x-5y+5z=9 \\ -3x-2y+z=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{5}y-4z=1 \\ -\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}y+\frac{5}{2}z=-4 \\ -5x-y+z=3 \end{cases}$

54. Mediante o método de Gauss discutir e resolver cando sexa posíbel os sistemas:

a) $\begin{cases} x+3y-z=-5 \\ 2x-y+5z=0 \\ x+10y-8z=9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+2y-3z=-2 \\ -x+8y-7z=0 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ 2x-y=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-y-5z=-25 \\ 7x+5y-z=17 \\ 3x-y+z=-21 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3y-4z=-5 \\ x-2y+3z=1 \\ 5x+8y-5z=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x-2y-z=4 \\ 2x-3y+4z=1 \\ x+4y-9z=2 \end{cases}$

55. Discutir os seguintes sistemas en función dos distintos valores do parámetro α e resolvelos cando sexan compatíbeis:

a) $\begin{cases} x+\alpha y+z=-2 \\ \alpha x+y+z=-2 \\ x+y+\alpha z=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+2y+z=9 \\ 2x-4y+8z=\alpha \\ x-2y+4z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+(\alpha-1)z=\alpha \\ x+y+z=\alpha+1 \\ x+\alpha y+\alpha z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=\alpha \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2\alpha y+3z=0 \\ 2x-2y+\alpha z=0 \\ y+2z=0 \\ \alpha x-y+2z=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x+2y+\alpha z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ \alpha x+y-z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (\alpha+2)x+y+z=\alpha-1 \\ \alpha x+(\alpha-1)y+z=\alpha-1 \\ (\alpha+1)x+(\alpha+1)z=\alpha-1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ \alpha y+2z=4 \\ 2y+\alpha z=4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x+3y-z=0 \\ -4x-2y+\alpha z=0 \\ 3x+4y+6z=0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x-y & = & \alpha x \\ 5x+y+2z & = & \alpha y \\ 4y+3z & = & \alpha z \end{cases}$

56. Cal é a solución do sistema $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x-5y-3z=0 \end{cases}$? Xustifíquese a resposta.

57. Discutir e resolver se é posíbel o sistema de ecuacións: $\begin{cases} 3x+y-z=4 \\ x+2y+z=-1 \\ y-2z=1 \end{cases}$ Escribir a ecuación matricial correspondente a este sistema e relacionar a existencia de inversa da matriz dos coeficientes co número de solucións do sistema.

58. Dado o sistema $\begin{cases} \alpha x+y+z=-2 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=-1 \end{cases}$ discutir a existencia de solucións segundo os valores do parámetro α. Resolver o sistema para α = -2.

59. Discutir o seguinte sistema segundo os valores de α e resolvelo para α = 1. $\begin{cases} x+y+z=\alpha+1 \\ \alpha x+y+(\alpha-1)z=\alpha \\ x+\alpha y=2\alpha-1 \end{cases}$

60. Discutir o seguinte sistema segundo os valores de α e interpretalo xeometricamente: $\begin{cases} \alpha x-y=1 \\ x-\alpha y=2\alpha-1 \end{cases}$

61. Achar α para que o seguinte sistema de ecuacións teña solucións distintas da trivial. Resolvelo e interpretalo xeometricamente: $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-\alpha y+z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$.

62. Os salarios da nai, do pai e un fillo sumados dan 3250€. A nai gana o dobre que o fillo. O pai gana 2/3 do que gana a nai. Canto gana cada un?

63. Achar tres números sabendo que o primeiro é igual a dúas veces o segundo máis a metade do terceiro, que a suma do segundo e o terceiro é igual ao primeiro máis 1, e que se restamos o segundo da suma do primeiro co terceiro, o resultado é 5.

64. Nunha adega hai dúas clases de viño: *A* e *B*. 0 da clase *A* ten un prezo de 1,80 euros/litro, e o da clase *B* de 1,30 euros/litro.

a) En que proporción deberán mesturarse para conseguir un viño que teña un prezo de 1,60euros/litro?

b) Para conseguir 100000 litros ao prezo de 1,60 euros/litro, cantos litros de cada clase debemos mesturar?

65. En 8 horas un traballador produce 10 mesas do tipo *A* e 9 do tipo *B*. En 10 horas produce 8 mesas do tipo *A* e 18 do tipo *B*. Determinar o tempo que tarda en producir cada tipo de mesa.

66. Unha refinería compra petróleo a dous países *A* e *B*. Comprando 500 barrís ao país *A* e 1500 ao país B resulta un prezo medio de 19,87€. Comprando 1000 barrís ao país *A* e 1000 o país *B* o prezo medio é de 18€ por barril. Canto custa o barril de petróleo de cada país?

67. Unha empresa ten tres minas con composicións:

	Níquel (%)	Cobre (%)	Ferro (%)
Mina A	1	2	3
Mina B	2	5	7
Mina C	1	3	1

Cantas toneladas de cada mina son necesarias para obter 7 toneladas de níquel, 18 de cobre e 16 de ferro?

68. Dispoñemos dun depósito de 24 litros de capacidade e de tres medidas *A*, *B* e *C*. Sabemos que o volume de *A* é o dobre do de *B*, que as tres medidas enchen o depósito e que as dúas primeiras éncheno ata a metade. Que capacidade ten cada medida?

69. Un taberneiro ten 10 litros de mestura de auga e viño. Cando a proba observa que é demasiado lixeira, polo que decide engadir unha certa cantidade de viño, e entón a cantidade de auga é o 30 % do total. Como segue sendo lixeira, engade de novo a mesma cantidade de viño que antes, e entón a cantidade de auga é o 20 % do total. Cantos litros de viño engadiu en cada ocasión e cantos hai de auga?

70. Un individuo investiu 60000€ repartidos en tres empresas e obtivo 4500€. de beneficios. Calcula o investimento realizado en cada empresa, sabendo que na empresa *A* fixo o dobre de investimento que na empresa *B* e *C* xuntas e que os beneficios das empresas foron do 5% na empresa *A*, 10% na *B* e do 20% na *C*.

71. Un transportista traballa con dous camións *A* e *B* que poden cargar 15 toneladas e 9 toneladas, respectivamente. Por transportar 300 toneladas de area tivo un gasto de 180€. Determinar o número de viaxes que fixo con cada camión se sabemos que cada viaxe do camión *A* custa 10€ e cada viaxe do *B* 5€.

72. Resolver os seguintes sistemas e interpretar xeometricamente o resultado.

a) $\begin{cases} -2x+2y+z=2 \\ x-2y+2z=1 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y-z=-1 \\ x+5y+3z=3 \\ x+y+z=1 \\ 3x+7y+5z=5 \end{cases}$