5 DERIVADAS

5.1 Taxa de variación media

A1. Representar graficamente o proceso de enchido dun depósito cilíndrico (de 2 m^2 de base) supoñendo un caudal constante (de 10 l/s). Representar sobre o eixe X o volume de líquido e sobre o eixe Y a altura que alcanza no depósito.

A2. Aumentar e diminuír a superficie da base para obter depósitos máis anchos ou máis estreitos e representar graficamente o proceso. Cando é máis rápido o incremento da altura do líquido no depósito? Cal é a propiedade da gráfica que pode medir este cambio?

A3. Escribir a expresión alxébrica da función que relaciona a altura do líquido co volume para un valor dado da superficie da base e representar esta función o máis exactamente posíbel. Repetir o proceso para vasos de varios anchos. Cal é o coeficiente da ecuación da función do que depende o maior ou menor crecemento da altura do líquido?

B1. Ao medir cada dous anos a estatura dunha persoa ata os 20 anos, obtivéronse os datos que expresamos na táboa:

Anos	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
cm	38	45	76	107	120	129	136	150	178	181	182

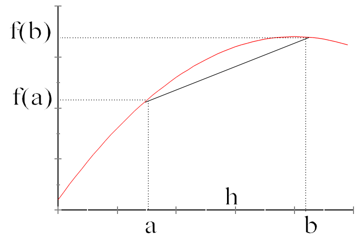
B2. Representar graficamente eses datos. No eixe X a idade e no eixe Y a estatura.

B3. Se o crecemento fora uniforme en todos os anos, ¿canto crecería cada ano?

Se o crecemento fora uniforme entre os 16 e os 20 anos, canto crecería cada ano?

Se o crecemento fora uniforme entre os 2 e os 6 anos, canto crecería cada ano?

B4. Como denominarías os resultados de **B3.**?



Chamamos ***taxa de variación media*** dunha función f(x) correspondente ao intervalo [a, b] (TVM[a, b]) ao cociente

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

é dicir, o cociente entre a *variación de f(x)* e a *variación de x* nese intervalo.

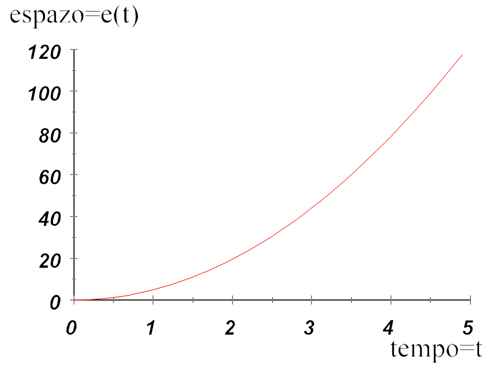
Se chamamos **h** á distancia entre **a** e **b**, entón **b = a + h**, e polo tanto a taxa de variación media de **f(x)** no intervalo **[a, a+h]** sería: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

C1. Representar graficamente as funcións: $f(x)=2x+5,\ f(x)=6x+1,\ f(x)=x^2,\ f(x)=x^3$

C2. Para as funcións de **C1,** achar a T.V.M. nos intervalos [-2, 0], [0, 1], [2, 3].

C3. Sacar algunha conclusión dos resultados obtidos en **C2.**

5.2 Taxa de variación instantánea



- Consideremos a función que expresa o espazo percorrido por un corpo en caída libre:

$$e(t) = 4.9t^2$$

onde **t** é o tempo en segundos e **e(t)** o espacio en metros.

Calcular a TVM (que se corresponde coa velocidade media) para os intervalos [0, 1], [1,2], [2, 3] e [3, 4], observar que esta aumenta co tempo.

Como poderiamos calcular a velocidade que ten o corpo despois de certo tempo (**variación instantánea**), por exemplo t = 3 s?

V. instantánea = $\mathbf{V_i(3)} = \lim_{h\to 0} \frac{e(3+h)-e(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(3+h)^2 - 4.9\times 3^2}{h} = 29.4\ {}^{m}\!/\!_{s}$

En xeral a V. instantánea para un tempo t = a será: $V_i(a) = \lim_{h\to 0} \frac{e(a+h)-e(a)}{h}$

Def.- Chamamos ***taxa de variación instantánea*** dunha función f(x) no instante $x = a$ ao límite das taxas de variación media cando os intervalos da variábel independente son cada vez máis pequenos:

$$V_i(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemplos: i) Para a función $f(x) = x^2$ a taxa de variación media no intervalo $[x, x+h]$ é:

$$TVM[x, x+h] = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

polo tanto, a taxa de variación instantánea para $x = a$ é:

$$V_i(a) = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

ii) Para a función $f(x) = x^3$ a taxa de variación media no intervalo $[x, x+h]$ é:

$$TVM[x, x+h] = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

polo tanto, a taxa de variación instantánea para $x = a$ é:

$$V_i(a) = \lim_{h\to 0}(3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 .$$

iii) Para a función $f(x) = \sqrt{x}$ a taxa de variación media no intervalo $[x, x+h]$ é:

$$TVM[x, x+h] = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

polo tanto, a taxa de variación instantánea para $x = a$ é:

$$V_i(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

5.3 Concepto de derivada

Def.- Chamamos ***derivada, f'(a), da función f(x) no punto x = a*** ao valor do límite:

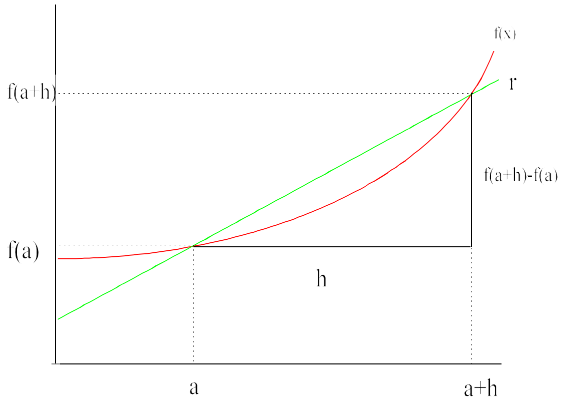
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

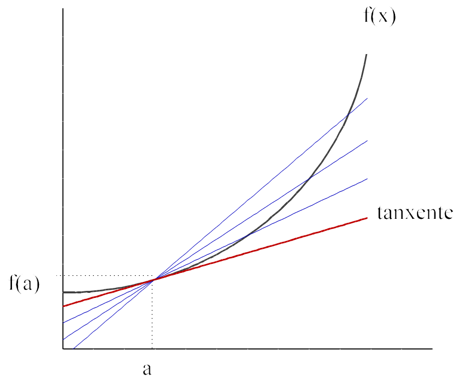
- Cando non existe este límite dicimos que a función non ten derivada no punto x = a.
- A derivada dunha función nun punto é un número real.
- Tamén podemos definir a derivada da función f(x) nun punto como o límite da TVM cando o a amplitude do intervalo tende a 0, ou tamén como a variación instantánea no instante x = a.

- Para que exista derivada dunha función nun punto é *necesario*, pero *non suficiente*, que a función sexa continua en dito punto. Por exemplo a función $f(x)=|x|$ é continua no punto cero pero non ten derivada nese punto.

$$\exists f'(a)\ \Rightarrow\ f(x) \text{ continua en } x=a$$
$$f(x) \text{ continua en } x=a\ \not\Rightarrow\ \exists f'(a)$$

Interpretación xeométrica da derivada





Pendente da secante (a, f(a))-(a+h, f(a+h)):

$$m=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Pendente da tanxente no punto (a, f(a)):

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- Da definición de derivada deducimos que a **derivada da función f(x) no punto** $x=a$ coincide co valor da **pendente da recta tanxente a f(x) no punto** $(a, f(a))$:

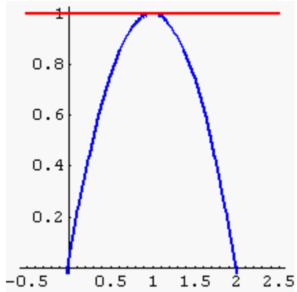
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

- Do anterior deducimos que a **ecuación da recta tanxente** á gráfica da función f(x) no punto $(a, f(a))$ será: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

- A **ecuación da recta normal** (perpendicular á tanxente) será: $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

Interpretación física da derivada

- Se temos a función que nos dá a posición dun móbil dependente do tempo, a derivada nun instante t proporcionaranos a velocidade instantánea do citado móbil nese momento.

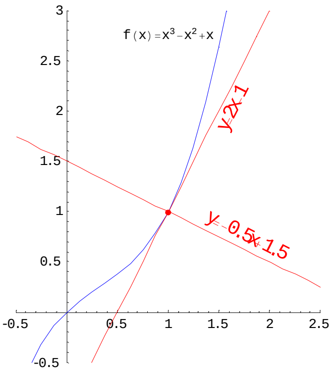


Exemplo 1: Para a función $f(x) = -x^2 + 2x$, a derivada no punto $x = 1$ será:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(1+h)^2 + 2(1+h) - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1 - h^2 - 2h + 2 + 2h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-h) = 0$$

Se representamos a función vemos que a pendente da recta tanxente, en $x = 1$, vale 0.



Exemplo 2: Para a función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, a derivada no punto $x = 1$ é:

$f'(1) = ... = 1$, entón as ecuacións da tanxente e normal no punto $x = 1$ son:

Ecuación da recta tanxente:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

Ecuación da recta normal:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Outras formas de escribir a derivada dunha función nun punto:

- Se facemos $x = a + h$ entón $h = x - a$, entón $x \to a$ cando $h \to 0$. Substituíndo estes valores temos que: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

- Nas ciencias experimentais utilízanse moitas veces taxas de variación ou incrementos para expresar as derivadas: $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

5.4 Función derivada. Derivadas sucesivas

Función derivada

- Se unha función ten derivada no conxunto **D** chámase **función derivada** (ou, simplemente, derivada) dunha función **f(x)** á función **f'(x)** que asocia a cada punto **x** de **D** a derivada de **f(x)** nese punto (f'(x)).

Exemplo: Para a función $f(x) = x^2$, a función derivada é $f'(x) = 2x$.

Derivadas sucesivas

- A partir da función derivada primeira pódese definir, se existe, tamén a súa derivada, que chamamos *derivada segunda* e denotamos por *f''(x)*.

Da mesma maneira defínense as *funcións derivadas terceira*, *cuarta*, ..., *enésima*, que denotamos por: $f^{3}(x)$, $f^{4}(x)$, ..., $f^{n}(x)$.

Exemplo: Para a función f(x) = x³ , $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f^{3}(x)=6$, $f^{4}(x)=f^{5}(x)=...=0$.

6 OPERACIÓNS E CÁLCULOS CON DERIVADAS

6.1 Algunhas derivadas fundamentais

Baseándonos na definición de derivada podemos obter a derivada das seguintes funcións, a derivada das restantes funcións obtense a partir destas.

6.1.1 Derivada da función constante $f(x)=k \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=0$

Demostr.- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k-k}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$.

6.1.2 Derivada da función identidade $f(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=1$

Demostr.- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$.

6.1.3 Derivada da función logaritmo $f(x)=\ln x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Demostr.- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Ln(x+h)-Lnx}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{Ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}Ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}Ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}},\ \text{como: } h\to 0 \ \Rightarrow\ \frac{x}{h}\to\infty$$

$$\text{temos que: } \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}Ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}Ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)=\frac{1}{x}Lne=\frac{1}{x}.$$

6.1.4 Derivada da función seno $f(x)=sen(x) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$

Demostr.- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-senx}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{senx\cosh+\cos x\,senh-senx}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{senx(\cosh-1)+\cos x\,senh}{h}=\lim_{h\to 0}\left(senx\frac{\cosh-1}{h}+\cos x\frac{senh}{h}\right)=\cos x.$$

6.2 Operacións con derivadas

6.2.1 Derivada da suma de dúas funcións $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

Exemplo: $(senx+Lnx)'=\cos x+\dfrac{1}{x}$.

6.2.2 Derivada do produto dun número por unha función $(k\,f)'(x)=k(f'(x))$

Exemplo: $(5x)'=5$.

6.2.3 Derivada do produto de dúas func. $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Exemplo: $(senx\cdot Lnx)'=\cos x\cdot Lnx+senx\cdot\dfrac{1}{x}$.

6.2.4 Derivada do cociente de dúas funcións $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Exemplo: $\left(\dfrac{senx}{Lnx}\right)'=\dfrac{\cos x\cdot Lnx-senx\cdot\dfrac{1}{x}}{(Lnx)^2}$.

6.2.5 Derivada de funcións compostas $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$. (Esta igualdade coñécese co nome de **regra da cadea**).

Exemplo: $(sen(Lnx))'=\cos(Lnx)\cdot\dfrac{1}{x}$.

Teorema.- (**Regra da cadea**) Se f é unha función derivable en x e g é derivable en f(x) , entón a composición g∘f é derivable en x. Ademais verifícase a fórmula $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

6.3 Derivación logarítmica

Hai ocasións en que o cálculo da derivada dunha función simplifícase derivando o logaritmo neperiano da mesma. A este proceso chamámoslle **derivación logarítmica**.

É especialmente útil para funcións do tipo **h(x) = f(x)$^{g(x)}$** :

$$h(x)=f(x)^{g(x)}\quad\Rightarrow\quad \ln h(x)=g(x)\cdot\ln f(x),$$

derivando temos $\dfrac{h'(x)}{h(x)}=g'(x).\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, de onde:

$$h'(x)=h(x)\left(g'(x).\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=f(x)^{g(x)}\left(g'(x).\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Exemplo: $f(x)=x^{\operatorname{sen}x}$

$$\ln f(x)=\operatorname{sen}x\cdot\ln x\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen}x\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{x^{\operatorname{sen}x}}=\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen}x\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow$$

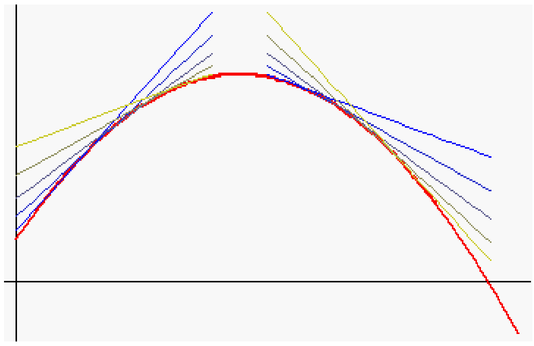
$$\Rightarrow f'(x)=x^{\operatorname{sen}x}\left(\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen}x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

6.4 Táboa de derivadas

TÁBOA DE DERIVADAS			
Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$f(x)=k\cdot g(x)$	$f'(x)=k\cdot g'(x)$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=(g(x))^n$	$f'(x)=n\cdot(g(x))^{n-1}.g'(x)$
$f(x)=Lnx$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=Lng(x)$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x)=\log_b x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_b e$	$f(x)=\log_b g(x)$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}\log_b e$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$f(x)=e^{g(x)}$	$f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot Lna$	$f(x)=a^{g(x)}$	$f'(x)=a^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot Lna$
$f(x)=\operatorname{sen}x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\operatorname{sen}g(x)$	$f'(x)=g'(x)\cdot\cos g(x)$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen}x$	$f(x)=\cos g(x)$	$f'(x)=g'(x)\cdot(-\operatorname{sen}g(x))$
$f(x)=\operatorname{arcsen}x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\operatorname{arcsen}g(x)$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos g(x)$	$f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
$f(x)=\arctan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\arctan g(x)$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{1+g^2(x)}$

7 APLICACIÓN DAS DERIVADAS AO ESTUDO LOCAL DE FUNCIÓNS

7.1 Crecemento e decrecemento

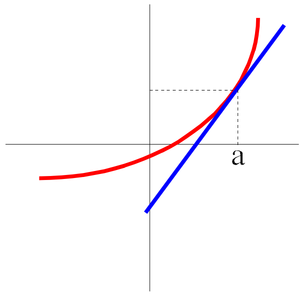


■ A recta tanxente a unha curva nun punto $x = a$ crece ou decrece segundo sexa a súa pendente $m = f'(a) > 0$ ou $m = f'(a) < 0$. Como a gráfica de f(x) cerca dese punto é moi próxima á recta tanxente, é de supoñer que o signo de f'(a) determine o crecemento da función.

Teor.- Sexa $f(x)$ unha función ten derivada en a:

i) $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente crecente en a.

ii) $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente decrecente en a.

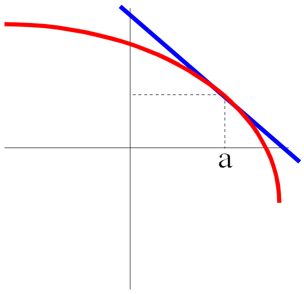


Demostr.- i) Se $f'(x) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$

(para todos os x dun entorno de a) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(a), \ cando \ x > a \\ f(x) < f(a), \ cando \ x < a \end{cases} \Rightarrow$$ f(x) estrit. crecente en a.

c.q.d.



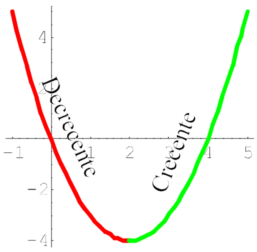
ii) Se $f'(x) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$ (para todos os x dun entorno de a) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(a), \ cando \ x < a \\ f(x) < f(a), \ cando \ x > a \end{cases} \Rightarrow$$ f(x) estrit. decrecente en a.

c.q.d.

▬ Consecuencia do anterior:

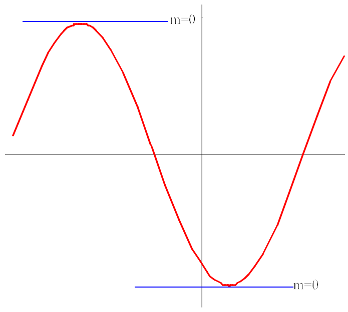
Se $f'(x) > 0, \ \forall x \in (a, b) \Rightarrow$ f(x) é estritamente crecente en (a, b)
Se $f'(x) < 0, \ \forall x \in (a, b) \Rightarrow$ f(x) é estritamente decrecente en (a, b)



Exemplo: A función $f(x) = x^2 - 4x$ ten como derivada a función $f'(x) = 2x - 4$, que verifica: $\begin{cases} f'(x) < 0, & para \quad x < 2 \\ f'(x) > 0, & para \quad x > 2 \end{cases}$

entón a función $f(x)$ é : $\begin{cases} Estritamente \ decrecente \ en \ (-\infty, 2) \\ Estritamente \ crecente \ en \ (2, \infty) \end{cases}$

7.2 Máximos e mínimos relativos



Teor.- Se f(x) ten derivada en a e ten en a un máximo ou un mínimo, entón $f'(x) = 0$.

Demostr.- Supoñamos que f(x) ten un máximo en a (para o mínimo a demostración é análoga).
Por ser *f(a)* máximo para un h>0 suficientemente pequeno verifícase que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0$, entón $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0$

Por ser *f(a)* máximo para un h<0 suficientemente pequeno verifícase que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$, entón $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$

Como $\exists f'(a)$, existe o límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

entón temos

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0 \quad e \quad \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

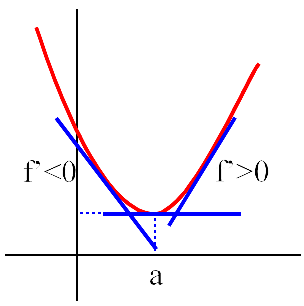
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$$

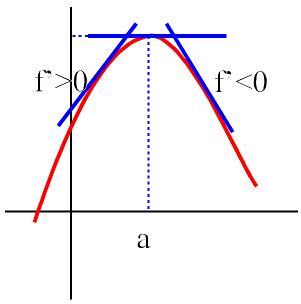
c.q.d.

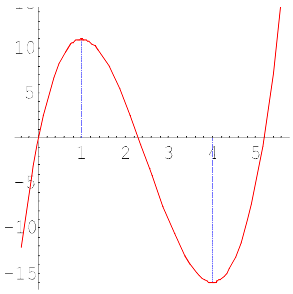
Teor.-

> Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ ten un máximo relativo en a.
> Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ ten un mínimo relativo en a.

Demostra.- (Ver debuxo)





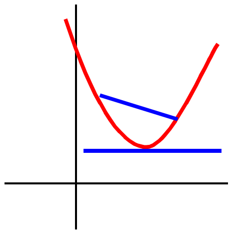


Exemplo: A función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ ten como función derivada

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$, $\quad 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

$f''(x) = 12x - 30 \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = -18 < 0 \Rightarrow Max: \ (1,11) \\ f''(4) = 18 > 0 \Rightarrow Min: \ (4,-16) \end{cases}$

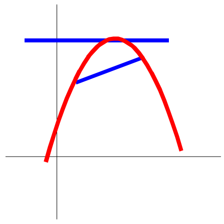
7.3 Convexidade e concavidade. Puntos de inflexión



Def.- Unha función ***f(x) é convexa nun punto a***, se existe un arco de curva que está, completamente, por encima da tanxente á curva en ***a***.

Def.- Unha función ***f(x) é convexa nun intervalo (a, b)***, se $\forall c, d \in (a, b)$ o segmento que une os puntos (c, f(c)) e (d, f(d)) queda por encima da gráfica de f(x).

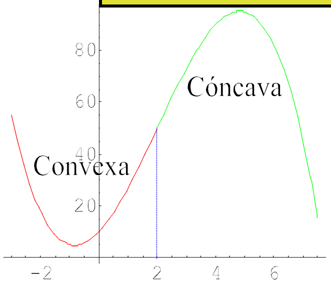
Def.- Unha función ***f(x) é cóncava nun punto a***, se existe un arco de curva que está, completamente, por debaixo da tanxente á curva en ***a***.



Def.- Unha función ***f(x) é cóncava nun intervalo (a, b)***, se $\forall c, d \in (a, b)$ o segmento que une os puntos (c, f(c)) e (d, f(d)) queda por debaixo da gráfica de f(x).

Teor.-

> Se f'(x) ten derivada en (a, b) e $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, entón f(x) é convexa en (a, b).
>
> Se f'(x) ten derivada en (a, b) e $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, entón f(x) é cóncava en (a, b).

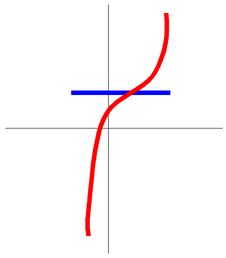


Exemplo: Para a función $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 12x + 10$ temos:

$f'(x) = -3x^2 + 12x + 12 \Rightarrow f''(x) = -6x + 12$

Para $x < 2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ f(x) convexa no intervalo $(-\infty, 2)$

Para $x > 2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ f(x) cóncava no intervalo $(2, \infty)$



Def.- Unha función ***f(x) ten un punto de inflexión en a,*** se a tanxente a curva en dito punto corta á gráfica de f(x).

- Consecuencia: se a función f(x) ten un punto de inflexión en a, entón nese punto f(x) cambia de convexa a cóncava ou ao revés.

Teo.- i) Se f(x) ten un punto de inflexión en a e $\exists f''(a) \Rightarrow f''(a) = 0$.

ii) Se f'‘(a) = 0 e a seguinte derivada non nula en a é de orde impar $\Rightarrow$ f(x) ten un punto de inflexión en a.

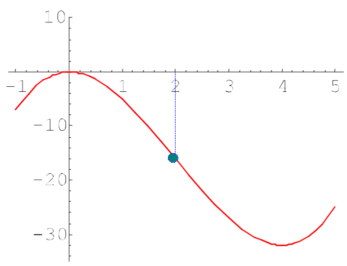
- Consecuencia:

> Se $f''(a) = 0$ e $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow f(x)$ ten un punto de inflexión en a.

Exemplo: Para a función $f(x) = x^3 - 6x^2$ temos:

$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12, \quad 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f''(2) = 0 \\ f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2, -16) \text{ é un punto de inflexión para f(x).}$$



7.4 Problemas de aplicación de máximos e mínimos

O cálculo de máximos e mínimos mediante derivadas permite resolver dunha maneira sinxela e rápida moitos problemas que aparecen tanto en matemáticas como noutras disciplinas científicas. Este tipo de problemas estivo presente na orixe do cálculo diferencial. Son problemas nos que se trata de optimizar unha función. Por exemplo, *minimizar* os custos dunha produción, *maximizar* os beneficios dunha empresa, etc.

Para resolvelos seguimos o esquema xeral seguinte:

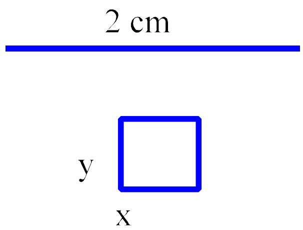
1. Mediante os datos do problema obtense a función que hai que *maximizar* ou *minimizar*. Na maioría dos casos vai ter dúas ou máis variábeis.

2. Se a función ten máis dunha variábel hai que relacionar as variábeis mediante ecuacións ca fin de conseguir expresar a función inicial formulada (punto 1.) en función dunha soa variábel.

3. Áchanse os máximos e mínimos desta función.

4. Analízanse os resultados obtidos rexeitando aqueles que polas características do problema non sexan posíbeis.

Exemplo 1: Cun arame de 2 m de lonxitude queremos formar un rectángulo de superficie máxima. Como debe facerse?.



1. Función que temos que maximizar:

$$S(x, y) = xy$$

2. Expresamos a superficie en función dunha soa variábel:

$$2x + 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2-2x}{2} = 1 - x \Rightarrow S(x) = x(1-x)$$

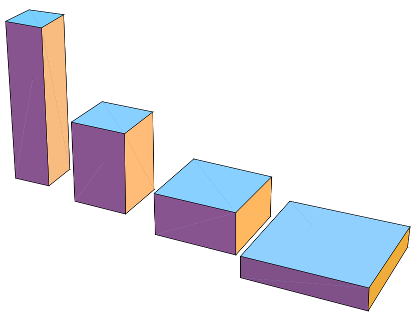
3. Achamos o máximo:

$$S'(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; \quad S''(x) = -2 \Rightarrow S''(\frac{1}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ En } x = \frac{1}{2} \text{ existe un máximo.}$$

4. A solución é formar un cadrado de medio cm de lado.

Exemplo 2: Achar as dimensións dun depósito aberto superiormente, en forma de prisma recto de base cadrada, de 500 m^3 de capacidade que teña un revestimento de custo mínimo.

Para que o custo do revestimento sexa mínimo ten que ser mínima a superficie.



1. Función que temos que maximizar:

$S(x, y) = x^2 + 4xy$, x: lado da base, y: altura

2. Expresamos a superficie en función dunha soa variábel:

$$x^2 y = 500 \Rightarrow y = \frac{500}{x^2} \Rightarrow S(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

3. Achamos o mínimo:

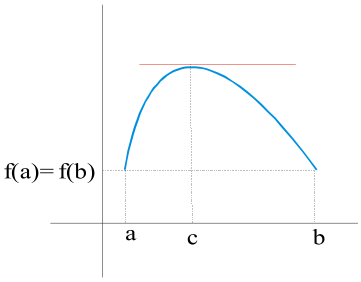
$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 10; \quad S''(x) = 2 + \frac{4000}{x^3} \Rightarrow S''(10) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ En x=10 existe un mínimo.}$$

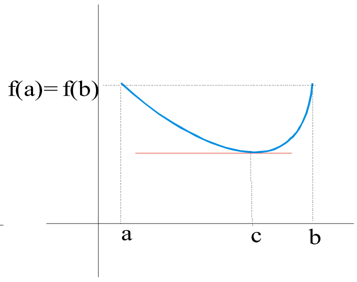
4. As dimensións deben ser 10 m o lado da base e 5 m a altura do prisma.

7.5 Teorema de Rolle

Teorema.- (Rolle) Sexa $f(x)$ unha función continua en $[a,b]$, derivábel en (a,b) e con $f(a)=f(b)$. Entón, existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Interpretación xeométrica: desde o punto de vista gráfico o que di este teorema é que se unha función $f(x)$ continua en $[a,b]$, derivábel en (a,b) e con $f(a)=f(b)$, existe, polo menos, un punto do intervalo (a,b) no que a recta tanxente á gráfica da función é paralela ao eixo de abscisas.

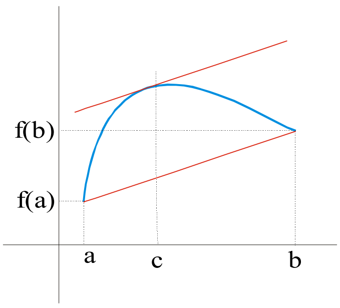




7.6 Teorema do valor medio do cálculo diferencial (TVMCD)

Teorema.- (TVMCD) Sexa $f(x)$ unha función continua en $[a,b]$ e derivábel en (a,b). Entón, existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que verifica : $\boxed{f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

Interpretación xeométrica: xeometricamente, este teorema di que se unha función $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivábel en (a,b) existe, polo menos, un punto do intervalo (a,b) no que a recta tanxente á gráfica da función é paralela á corda que une os puntos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.



7.7 Regra de L`Hôpital

No proceso de calcular o límite dunha función nun punto, ou no infinito, podemos encontrarnos con algunha das seguintes indeterminacións:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad \infty^0,\quad 1^\infty,\quad 0^0$$

Moitas veces, é difícil ou imposíbel, reducir estas indeterminacións mediante transformacións alxebraicas da expresión da función. A *regra de L'Hôpital* proporciona un medio para poder reducir a indeterminación no caso de que traballemos con funcións derivábeis.

7.7.1 Indeterminacións do tipo: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 1.- (Regra de L'Hôpital) Sexan f(x) e g(x) dúas funcións con derivada no intervalo (a, b) e tal que g'(x) non se anula en ningún punto do intervalo (a, b).

Se para $c\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$, e se existe o, $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ entón existe $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e, ademais, $\boxed{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

▬ A regra de L'Hôpital, tal como a enunciamos, é útil para indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$, pero tamén pode aplicarse a indeterminacións do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, como se deduce do teorema 2:

Teorema 2.- (Regra de L'Hôpital) Sexan f(x) e g(x) dúas funcións para as que esixte derivada no intervalo (a, b) e tal que g'(x) non se anula en ningún punto do intervalo (a, b).

Se para $c \in (a,b)$, $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, e se existe o, $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ entón existe $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ e, ademais, $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

▬ A regra de L'Hôpital tamén é aplicábel para $c = \pm\infty$.

Exemplos: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$, $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{1} = 2$.

■ Ás veces é necesario aplicar reiteradamente a regra de L'Hôpital para desfacer a indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

▬ Cando se aplica varias veces seguidas a regra de L'Hôpital, debe comprobarse en cada paso que o límite resultante é tamén de tipo indeterminado $\frac{\infty}{\infty}$ ou, $\frac{0}{0}$ se isto non ocorre podemos obter un resultado non correcto, como se pon de manifesto no seguinte exemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x^2+1} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{6x} = \frac{2}{0} = \pm\infty \quad \text{Falso}$$

o resultado correcto é: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$

7.7.2 Indeterminacións do tipo: $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$

■ Estes tipos poden reducirse facilmente a un da forma $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Exemplos: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot(-\ln x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$, $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{senx} - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{x - senx}{x\cdot senx} = \frac{0}{0}$

7.7.3 Indeterminacións do tipo: 0^0 , ∞^0 , 1^∞

Aplicando logaritmos poden converterse no tipo $0\cdot\infty$.

Exemplos: $l = \lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0 \Rightarrow \ln l = \lim_{x\to 0^+}\ln x^x = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = 0\cdot\infty = \ldots = 0 \Rightarrow l = e^0 = 1$

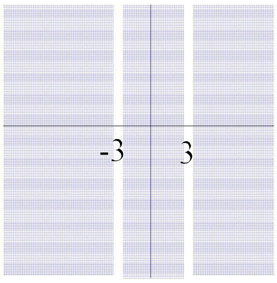
$$l = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{senx} = \infty^0 \Rightarrow \ln l = \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{senx} = \lim_{x\to 0^+} senx\cdot\ln\frac{1}{x} = 0\cdot\infty = \ldots = 0 \Rightarrow l = e^0 = 1$$

$$l = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = 1^\infty \Rightarrow \ln l = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right) = \infty\cdot 0 = \ldots = 2 \Rightarrow l = e^2$$

7.8 Estudo e representación de funcións. Método para a representación

Para facer a gráfica dunha función temos que, previamente, estudar as súas propiedades. Cada función esixe un estudo particular, pero para todas débese seguir un procedemento ordenado, que pode ser o que se expón a continuación para representar a función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$.

7.8.1 Dominio e imaxe



- Dominio de f: $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \,/\, f(x)\in\mathbb{R}\}$
- Imaxe de f: $I(f)=\{f(x)\in\mathbb{R} \,/\, x\in D(f)\}$

Para a función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, $D(f)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$, $I(f)=\mathbb{R}$.

7.8.2 Simetrías

- Simetría respecto ao eixo de ordenadas (OY): $f(x)=f(-x),\ \forall\in D(f)$ (**Simetría par**)
- Simetría respecto á orixe de coordenadas (O): $f(-x)=-f(x),\ \forall\in D(f)$ (**Simetría impar**)

$f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}=\dfrac{2(-x)^2}{9-(-x)^2}=f(-x)$ $\Rightarrow$ f(x) simétrica respecto ao eixe Y (par).

7.8.3 Corte cos eixes de coordenadas

- Corte co eixo de ordenadas: (0, f(0)):
- Corte co eixo de abscisas: (a, 0), (b, 0),....; onde a, b,... son as solucións da ecuación f(x) = 0.

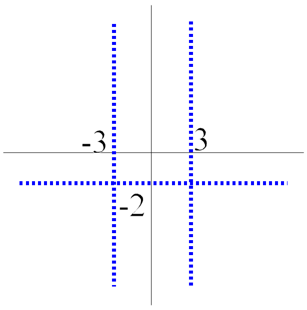
Para a función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, (0, 0) é o único punto de corte cos eixes.

7.8.4 Periodicidade

- Unha función é periódica se: $f(x+T)=f(x),\forall x\in D(f)$, onde **T** é un número real chamado **período**.

A función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$ non é periódica.

7.8.5 Asíntotas



- ***Asíntotas horizontais***: ***y*** = ***b***, onde $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{9-x^2}=-2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{9-x^2}$ $\Rightarrow$ f(x) ten unha asíntota horizontal y = -2

- ***Asíntotas verticais***: ***x = a***, cando se verifica $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -\infty & \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = +\infty & \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f(x) ten dúas asíntotas verticais } x = -3 \text{ e } x = 3.$$

- ***Asíntotas oblicuas***: ***y = mx + n*** ($m \neq 0$), onde $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m, \quad n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{9-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{9x-x^3} = 0 \ \Rightarrow \text{ f(x) non ten asíntotas oblicuas .}$$

7.8.6 Máximos é mínimos relativos

- Se $f'(a) = 0$ *e* $f''(a) < 0 \Rightarrow$ f(x) ten un máximo relativo en *a*.
- Se $f'(a) = 0$ *e* $f''(a) > 0 \Rightarrow$ f(x) ten un mínimo relativo en *a*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{36}{\left(9-x^2\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f''(x) = \dfrac{324+108x^2}{\left(9-x^2\right)^3} \end{array}\right\} \Rightarrow f''(0) > 0 \Rightarrow \text{ f(x) ten un mínimo relativo en (0, 0).}$$

7.8.7 Intervalos de crecemento e decrecemento

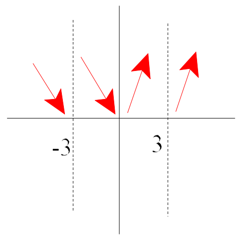
- $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente crecente en *a*.
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente decrecente en *a*.

No intervalo $\left(-\infty, -3\right)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é decrecente

No intervalo $\left(-3, 0\right)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é decrecente

No intervalo $\left(0, 3\right)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é crecente

No intervalo $\left(3, \infty\right)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é crecente



7.8.8 Puntos de inflexión

- Se $f''\left(a\right) = 0$ e a seguinte derivada non nula en *a* é de orde impar $\Rightarrow f(x)$ ten un punto de inflexión en *a*.
- En particular: Se $f''\left(a\right) = 0$ *e* $f'''\left(a\right) \neq 0 \Rightarrow f\left(x\right)$ ten un punto de inflexión en *a*.

A ecuación $\dfrac{324+108x^2}{\left(9-x^2\right)^3} = 0$ non ten solución real $\Rightarrow f(x)$ non ten puntos de inflexión.

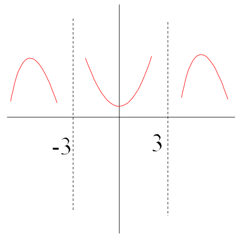
7.8.9 Intervalos de convexidade e concavidade

- Se $f'(x)$ é derivábel en $(a,\ b)$ e $f''(x) > 0,\ \forall x \in (a,\ b)$, entón $f(x)$ é convexa en $(a,\ b)$.
- Se $f'(x)$ é derivábel en $(a,\ b)$ e $f''(x) < 0,\ \forall x \in (a,\ b)$, entón $f(x)$ é cóncava en $(a,\ b)$.

No intervalo $(-\infty,\ -3)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é cóncava

No intervalo $(-3,\ 3)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é convexa

No intervalo $(3,\ \infty)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é cóncava



7.8.10 Táboa de valores

x	f(x)	
0	*0*	Mínimo
±1/2	2/35	
±1	1/4	
±3/2	2/3	
±2	8/5	
±5/2	50/11	
±7/2	-98/13	
±4	-32/7	
±9/2	-18/5	
±5	-25/8	
±10	-200/91