8 INTEGRAL INDEFINIDA

8.1 Definición de primitiva dunha función. Integral indefinida

□□□

Def.- Dise que a función ***F(x) é unha primitiva da función f(x)*** se $F'(x) = f(x),\ \forall x \in Dom(f)$.

Exemplo: $F(x) = x^2,\quad F(x) = x^2 + 1,\quad F(x) = x^2 + 2$, ... son primitivas de $f(x) = 2x$.

Teor.- Se F(x) é unha primitiva de f(x), entón $G(x) = F(x) + C,\ \forall C \in \mathbb{R}$, tamén é unha primitiva de f(x).
Ademais, se F(x) é unha primitiva de f (x), entón calquera primitiva G(x) de f(x) é da forma

$$G(x) = F(x) + C$$

(***C : constante de integración***)

Demostr.- Se F(x) primitiva de f(x) $\Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow G'(x) = F'(x) + 0 = f(x) \Rightarrow$ G(x) primitiva de f(x).

c.q.d.

Se F(x) e G(x) son primitivas de f(x): $\Rightarrow F'(x) = G'(x) = f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(x) - G'(x) = \big(F(x) - G(x)\big)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = C\ (constante) \Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

c.q.d.

Def.- ***Integral indefinida de f***(x) é o conxunto de todas as primitivas da función f(x).

Notación: Integral indefinida de f (x): $\int f(x)\,dx$

Para calcular a integral indefinida dunha función f(x), achamos unha primitiva súa e sumámoslle unha constante C :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$, onde F(x) é unha primitiva de f(x) e $C \in \mathbb{R}$.

Exemplo: $\int 2x\,dx = x^2 + C$

8.2 Propiedades da integral indefinida

i. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

ii. $\int dx = x + C$

iii. $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

iv. $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Exemplos: $\int \left(x^3 + \text{sen}(x)\right)dx = \int x^3\,dx + \int \text{sen}(x)\,dx = \dfrac{x^4}{4} - \cos(x) + C$

$$\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + C = x^4 + C$$

8.3 Táboa de integrais inmediatas

i)	$\int 0\,dx = C$
ii)	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
iii)	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
iv)	$\int e^x\,dx = e^x + C$
v)	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ ,\quad a>0\ e\ a\neq 1$
vi)	$\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$
vii)	$\int \cos x\,dx = sen\,x + C$
viii)	$\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert + C$
ix)	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$
x)	$\int \dfrac{1}{sen^2 x}\,dx = -cotan\,x + C$
xi)	$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C\ ,\quad a\neq 0$
xii)	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = arcsen\dfrac{x}{a} + C\ ,\quad \lvert x\rvert<a$
xiii)	$\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\,dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C\ ,\quad a\neq 0$
xiv)	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

9 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

9.1 Integración inmediata

□□□

Consiste en aplicar a táboa de integrais inmediatas. A utilización da táboa pode ser directa ou facendo unha transformación elemental e aplicando as propiedades das integrais indefinidas.

Exemplo 1: $\int sen\,3x\,dx = -\dfrac{\cos 3x}{3} + C$

Exemplo 2: $\int -4x + (2x)^3\,dx = -4\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(2x)^4}{4}\dfrac{1}{2} + C = -2x^2 + \dfrac{(2x)^4}{8} + C$

9.2 Integración por cambio de variábel

Este método fundaméntase no seguinte teorema:

Teor.- Sexa f(x) unha función que ten unha primitiva F(x) e sexa $\varphi(t)$ unha función derivábel, entón a función $F(\varphi(t))$ é unha primitiva para a función $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, e polo tanto

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

Demostr.- Aplicar a regra da cadea a función $F(\varphi(t))$.

Tendo en conta o resultado anterior:

facendo $x = \varphi(t)$, como $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t)$, temos que $dx = \varphi'(t)\,dt$

entón $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C$

Exemplo 1.- Calcular a integral $\int sen\,4x\,dx$. Facemos o cambio (t = 4x), $x = \varphi(t) = \dfrac{t}{4}$, polo tanto $dx = \dfrac{dt}{4}$, entón

$$\int \mathrm{sen}4x\,dx = \int \mathrm{sen}t\dfrac{dt}{4} = \dfrac{1}{4}\int \mathrm{sen}t\,dt = -\dfrac{1}{4}\cos t + C = -\dfrac{1}{4}\cos 4x + C$$

Exemplo 2: $\int sen\,x\cos x\,dx$. Facemos $t = \mathrm{sen}x,\quad dt = \cos x\,dx$

$$\int \mathrm{sen}\,x\cos x\,dx = \int t\,dt = \dfrac{t^t}{2} + C = \dfrac{\mathrm{sen}^2 x}{2} + C$$

Exemplo 3: $\int 2xe^{x^2}dx$. Facemos $t = x^2,\quad dt = 2x\,dx$

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

9.3 Integración por partes

O método de integración por partes está baseado na fórmula: $\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$.

Esta fórmula dedúcese a partir da regra de derivación do produto:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

polo tanto, $\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,dx = \int [u(x)v(x)]'\,dx = u(x)v(x) + C$

de onde, $\int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) + C$

entón, $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx + C$

e facendo o cambio de notación $v = v(x),\ u = u(x),\ dv = v'(x)\,dx,\ du = u'(x)dx$

temos a fórmula de integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Exemplo 1: Calcular a integral $\int x e^x\,dx$

Facendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$, e aplicando a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ temos

$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

Exemplo 2: $\int x \ln x\,dx$.

$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$, $\int x\ln x\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C$

Exemplo 2: $\int \ln x\,dx$

$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$, $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\dfrac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$

9.4 Integración de funcións racionais

As integrais que se estudan neste apartado son da forma $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$

onde P(x) e Q(x) son polinomios.

Se grao de P(x) é maior ou igual ao grao de Q(x) , dividimos P(x) entre Q(x) obténdose un cociente C(x) e un resto R(x):

$$P(x) = C(x)\cdot Q(x) + R(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad\Rightarrow\quad \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Entón, a resolución da integral $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ redúcese a resolver dúas integrais; unha inmediata (integral dun polinomio) e unha integral dunha **función racional irreductíbel**.

O método para resolver este tipo de integrais consiste en descompoñer o denominador en factores primos e tratar de expresar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fraccións que teñen por denominadores os factores primos de Q(x).

Ao descompoñer o denominador, Q(x), en factores primos poden presentarse os seguintes casos:

I.- Todas as raíces de Q(x) son reais e simples

Exemplo 1: $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-4}{x-1}+\frac{5}{x-2}dx = -4\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C$$

Exemplo 2: $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = \int \frac{-1/6}{x}+\frac{3/10}{x-2}+\frac{-2/15}{x+3}dx = \frac{-1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| + \frac{-2}{15}\ln|x+3| + C$

II.- Todas as raíces de Q(x) son reais e algunha é múltiple

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \frac{-1/2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1/2}{x+1}dx = = \frac{-1}{2}\ln|x-1| + 4\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

III.- Algunha raíz de Q(x) é complexa e simple

Exemplos: $\displaystyle\int \frac{2x}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}dx =$

$$= \int \frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2}dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$$

IV.- Algunha raíz de Q(x) é complexa e múltiple

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \tan t \Rightarrow \begin{cases} t = \arctan x \\ sen\, t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt \end{array} \right\}$

$$= 2\arctan x + \int \cos^2 t\, dt = 2\arctan x + \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = 2\arctan x + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen\, 2t + C =$$

$$= 2\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}2 sen\, t \cos t + C = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C$$

9.5 Integración de funcións trigonométricas

Para calcular a integral dalgunhas funcións é necesario valerse das seguintes identidades:

i) $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$

ii) $1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$

iii) $\operatorname{sen}^2(x)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$

iv) $\cos^2(x)=\frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$

v) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

vi) $\operatorname{sen}(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)\right)$

vii) $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$

viii) $\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$

Un cambio de variábel moi utilizado é:

$$\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\frac{x}{2}=\arctan t\Rightarrow x=2\arctan t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Ademais, aplicando algunhas das fórmulas anteriores temos: $\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}$ *e* $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Exemplo: $\int\frac{1}{1-sen\,x}dx$. Facendo $t=\tan\frac{x}{2}$, $\quad sen\,x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int\frac{1}{1-sen\,x}dx=\int\frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2}{t^2-2t+1}dt=\frac{2}{1-t}+C=\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}}+C$$

Outros cambios:

$t = tan\,x$. *Exemplo:* $\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$

$t = sen\,x$ $(t = cos\,x)$. *Exemplo:* $\int\operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\,dx$

9.6 Cambios de variábel trigonométricos

Para integrar $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$, facemos o cambio de variábel $x = a\,tan\,t$.

Para integrar $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$, facemos o cambio de variábel $x = a\,sec\,t$.

Para integrar $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, facemos o cambio de variábel $x = a\,sen\,t$.

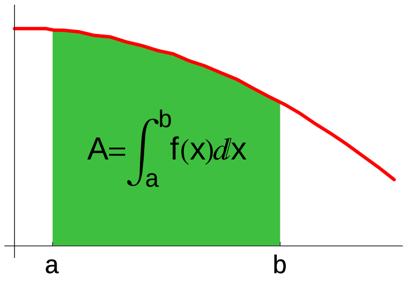
Exemplo: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

Facendo $x=\operatorname{sen}t,\quad dx=\cos t\,dt$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-sen^2 t}\,\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\ldots=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{arcsen\,x}{2}+C\,.$$

10 INTEGRAL DEFINIDA

10.1 Integral definida dunha función



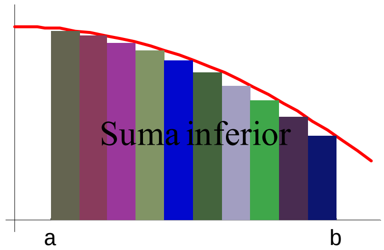
Dada unha función continua non negativa, *f(x)*, definida nun intervalo $[a,\ b]$, trátase de calcular a área da rexión do plano delimitada pola gráfica de *f(x)*, o eixe *OX* e as rectas $x-a=0$ e $x-b=0$. (Área = *A*)

Se *f(x)* é continua alcanza un máximo é un mínimo absolutos no intervalo *[a, b]*:

$$M=\text{máx}\{f(x)/x\in[a,\ b]\}\ e\ m=\text{mín}\{f(x)/x\in[a,\ b]\}$$, entón

$$m(b-a)\leq A\leq M(b-a)$$

é temos, polo tanto, unha acotación da área.

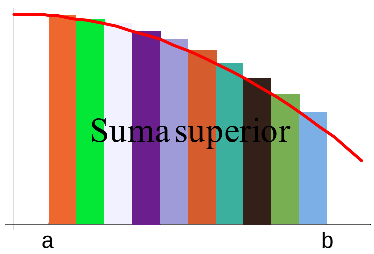


Consideremos agora unha partición, P_n, do intervalo $[a,\ b]$, i. é:

$$P_n=\{t_0,\ t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n\}\subset[a,\ b]$$, onde

$$a=t_0<t_1<t_2,\ ...,\ t_n=b$$

e sexan:



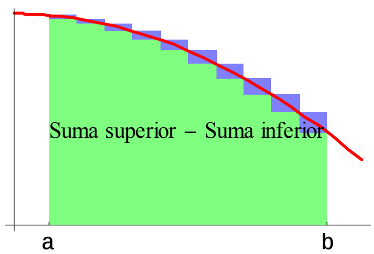
$$M_i=\text{máx}\{f(x)/x\in[t_{i-1},\ t_i]\}\ e\ m_i=\text{mín}\{f(x)/x\in[t_{i-1},\ t_i]\}$$

$$s(f,P_n)=m_1(t_1-t_0)+m_2(t_2-t_1)+...+m_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

(Suma inferior)

$$S(f,P_n)=M_1(t_1-t_0)+M_2(t_2-t_1)+...+M_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1})$$

(Suma superior)



entón

$$s(f,\ P_n)\leq A\leq S(f,\ P_n)$$

Se no lugar da partición P_n tomamos outra con máis puntos, entón a diferenza $S(f,\ P_n)-s(f,\ P_n)$ e máis pequena. Polo tanto, temos unha mellor acotación da área.

Se facemos tender *n* a infinito, entón $S(f,\ P_n)\ e\ s(f,\ P_n)$ coincidirán e serán iguais a *A*:

$$\lim_{n\to\infty}S(f,P_n)=A=\lim_{n\to\infty}s(f,P_n)$$

A este límite chamámoslle ***integral definida*** da función *f(x)* no intervalo *[a, b]*, que denotamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(*a* e *b* chámanse ***límites de integración***).

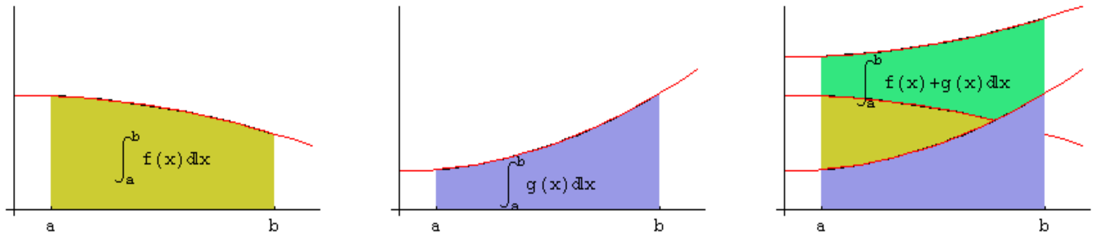
Da definición de integral definida deducimos que esta coincide co valor da área da rexión do plano delimitada pola gráfica de *f(x)*, o eixe *OX* e as rectas $x-a=0\ e\ x-b=0$, i. é: $A=\int_a^b f(x)\,dx$

10.2 Propiedades da integral definida

i) *Linealidade*: Se *f(x)* e *g(x)* son dúas funcións para as que existe integral en [a, b], entón tamén existe integral para as funcións $f(x)+g(x)$ e $a\cdot f(x)$ $(a\in\mathbb{R})$, e verifícase:

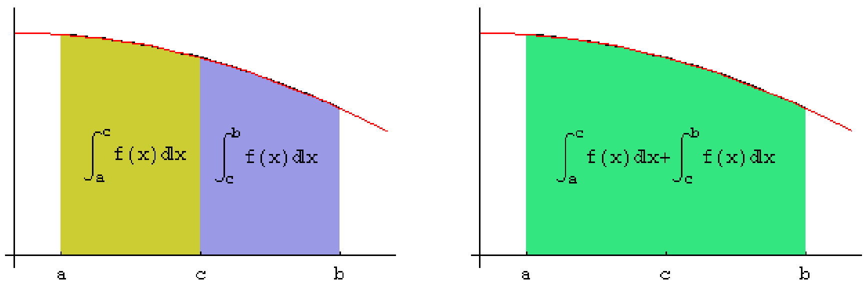
$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

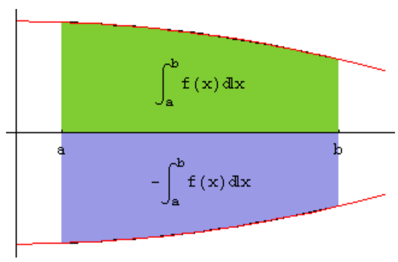


ii) *Aditividade respecto ao intervalo*: Se unha función *f(x)* é integrábel en $[a,\ c]$ e $[c,\ b]$, $c\in[a,\ b]$, entón tamén é integrábel en $[a,\ b]$ e, ademais verifícase:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$



iii) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$



iv) $\int_a^a f(x)\,dx=0$

v) *Monotonía.-* Se *f(x)* e *g(x)* son dúas funcións integrábeis en $[a,\ b]$ e tal que

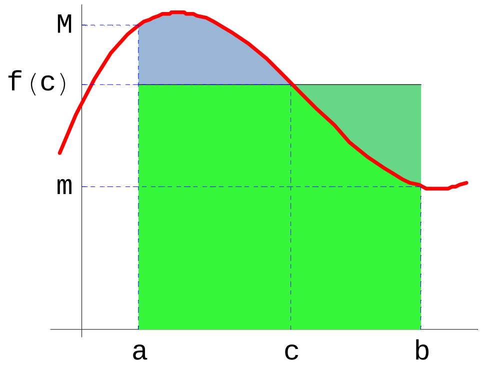
$f(x)\le g(x),\quad \forall x\in[a,\ b]$, entón $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

Se *f(x)* é unha función integrábel en $[a,\ b]$ e tal que

$f(x)\ge 0,\quad \forall x\in[a,\ b]$, entón $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$

vi) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx$

10.3 Teorema do valor medio do cálculo integral



Teorema.- (*Valor medio do cálculo integral*) Sexa $f(x)$ unha función continua no intervalo $[a, b]$, entón $\exists c \in [a, b]$ tq :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}$$

O valor *f(c)* recibe o nome de *altura media* (ou *valor medio*) da función.
A interpretación xeométrica deste teorema é a seguinte: a área do trapecio mixtilíneo $a\,b\,f(a)\,f(b)$ é igual á área dun rectángulo de base $b-a$ e altura *f(c)*, sendo *c* un punto do intervalo $[a, b]$.

Demostr.-
Por ser *f* unha función continua existen os valores:
$M = máx\{f(x) / x \in [a, b]\}$ e $m = mín\{f(x) / x \in [a, b]\}$, verificándose que

$$m \le f(x) \le M,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Como *f(x)* é continua, toma todos os valores entre *m* e *M* polo tanto $\exists c \in [a, b]$ tq

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad c.q.d.$$

10.4 Teorema fundamental do cálculo integral

O importante resultado, coñecido como teorema fundamental do cálculo integral, relaciona o cálculo diferencial e integral.

Teorema.- (*Fundamental do cálculo integral*)

Sexa $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ unha función continua nun punto $c \in (a, b)$; entón a función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ten derivada en c, e ademais $F'(c) = f(c)$.

Consecuencia do t.f.c.i. é o seguinte resultado:

Se *f(x)* é unha función continua no intervalo cerrado $[a, b]$, entón $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ é unha función para que existe derivada no intervalo aberto (a, b) e $F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Isto quere dicir que *F(x)* é unha primitiva de *f(x)*.

10.5 Regra de Barrow

Teorema.- (Regra de Barrow)

Sexa $[a,\, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ unha función integrábel, e $[a,\, b] \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ unha función diferenciábel en $(a,\, b)$ tq $F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (i. é *F(x)* é unha primitiva de *f(x)*) , entón

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

Notación: $\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Demostr.- Polo t.f.c.i. sabemos que a función $G(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ é unha primitiva de f, como F tamén é unha primitiva, debe verificarse que $G(x) = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$, entón $\int_a^x f(x)\, dx = F(x) + C$ de onde deducimos que $\int_a^a f(x)\, dx = 0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a)$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

c.q.d.

- A regra de Barrow proporciona un método para o cálculo de integrais definidas:
  - i) Calculamos unha primitiva de *f(x)*
  - ii) Calculamos *F(b) - F(a)* .

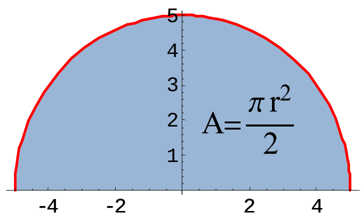
Exemplo 1: Calcular $\int_3^6 x^2 + 5\, dx$

Unha primitiva é $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5x$

entón $\int_3^6 x^2 + 5\, dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + 5x\right]_3^6 = F(6) - F(3) = 102 - 24 = 78$.

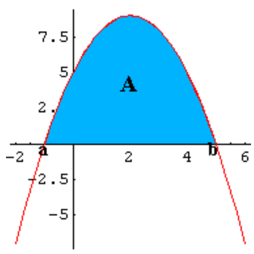
Exemplo 2:

$$\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} = \ldots = \left[\frac{1}{2} x\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{5}\right]_{-5}^5 = \frac{25}{2}\pi$$

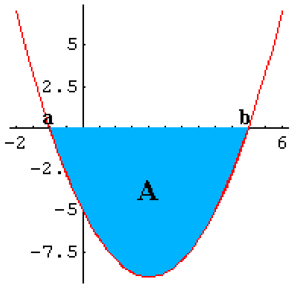


11 APLICACIÓNS DA INTEGRAL DEFINIDA

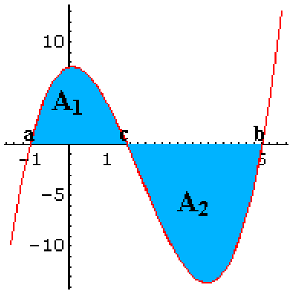
11.1 Cálculo de áreas planas limitadas por funcións



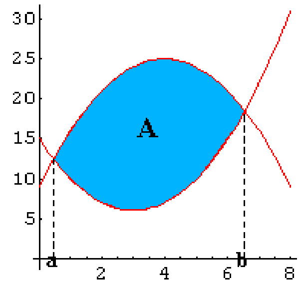
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



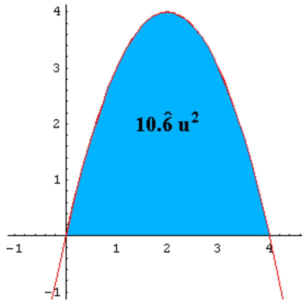
$$A = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

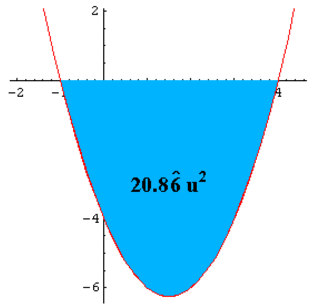
Exemplo 1.- Determinar a área da rexión do plano delimitada pola gráfica da función $f(x) = -x^2 + 4x$ e o eixe OX.

$$A = \int_0^4 -x^2 + 4x\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 10.\widehat{6}\,u^2$$



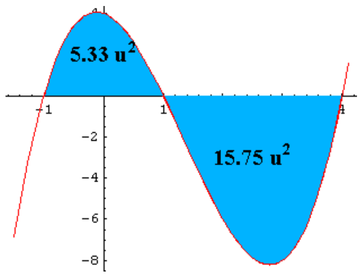
Exemplo 2.- Determinar a área da rexión do plano delimitada pola gráfica da función $f(x) = x^2 - 3x - 4$ e o eixe OX.

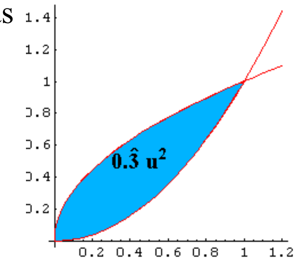
$$A = -\int_{-1}^4 x^2 - 3x - 4\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 4x\right]_{-1}^4 = 20.8\widehat{6}\,u^2$$



Exemplo 3.- Determinar a área da rexión do plano delimitada pola gráfica da función $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ e o eixe OX.

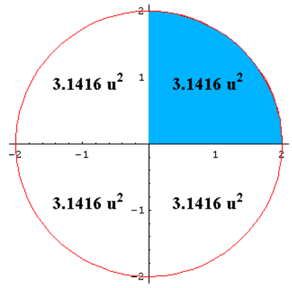
$$A = \int_{-1}^1 x^3 - 4x^2 - x + 4\,dx - \int_1^4 x^3 - 4x^2 - x + 4\,dx = \ldots = 21.08\,u^2$$





Exemplo 4.- Determinar a área da rexión do plano delimitada polas gráficas das funcións $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \ldots = 0.\widehat{3}\; u^2$$

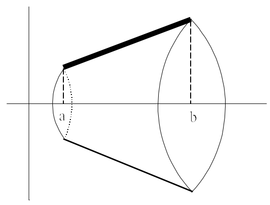


Exemplo 5.- Determinar a área dun círculo de radio 2.

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2} = \ldots = 4\times 3.1416 = 12.5664\, u^2$$

11.2 Cálculo do volume dun sólido de revolución

Volume que se obtén ao xirar unha rexión plana (delimitada pola gráfica de f(x), as rectas $x - a = 0$ e $x - b = 0$, e o eixe OX) arredor do eixe OX:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

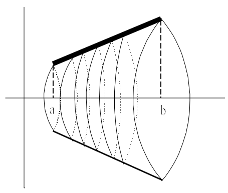
Exemplo 1.- Determinar o volume do sólido de revolución creado ao xirar a gráfica da función $f(x) = x + 2$ arredor do eixe OX entre os puntos $a = 1$ e $b = 4$ b = 4.

$$V = \pi \int_1^4 (x+2)^2\, dx = \ldots = 197.92\, u^2$$

Exemplo 2.- Determinar o volume dunha esfera de radio 4.

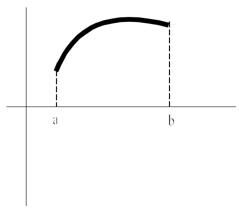
$$V = \pi \int_{-4}^4 \left(\sqrt{16-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-4}^4 \left(16 - x^2\right) dx = \ldots = 268.083\, u^2$$

11.3 Cálculo da área dun sólido de revolución



$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\; dx$$

11.4 Cálculo da lonxitude dun arco da gráfica dunha función



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\; dx$$