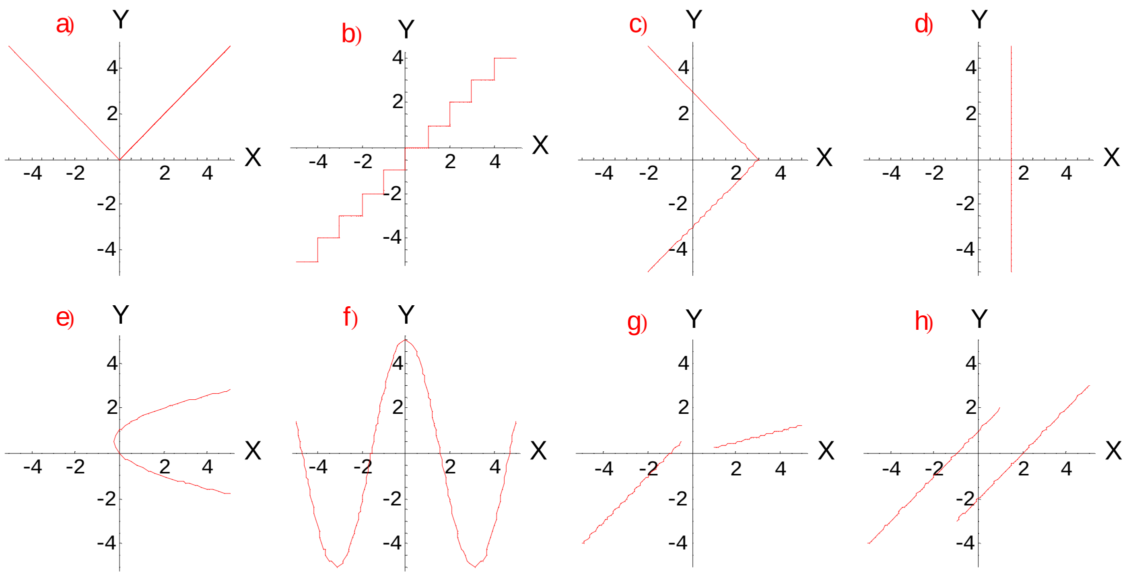
EXERCICIOS E PROBLEMAS



1. Indicar cales das gráficas do debuxo corresponden a unha función. (Xustificar a resposta).

2. Escribir a expresión analítica das seguintes funcións:

a) Asignar a un número o dobre do seu cadrado.

b) Asignar a un número o volume dun cubo de aresta igual a ese número.

c) Asignar a un número o volume dun prisma de base $4\,m^2$ e altura igual a ese número.

d) Asignar a un número o volume dun cono de base $12\,m^2$ e altura igual a ese número.

e) Asignar a un número o volume dunha esfera de radio igual a ese número.

3. Calcular os puntos de corte das seguintes funcións cos eixes de coordenadas:

a) $f(x)=3x-12$

b) $f(x)=-x^2-6x$

c) $f(x)=x^3-4x$

d) $f(x)=3^x$

e) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$

f) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-2x}$

4. Achar o dominio das seguintes funcións:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+4}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{3}{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+8x+16}$

f) $f(x)=\sqrt{2x+6}$

g) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-6}{x-1}}$

h) $f(x)=\sqrt{(x-5)(x+4)}$

i) $f(x)=\sqrt{x^2-16}$

j) $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$

k) $f(x)=\ln(x^2-4)$

l) $f(x)=\dfrac{\ln(x+5)}{x+1}$

5. Representar graficamente as funcións e indicar o seu dominio e o seu percorrido:

a) $f(x)=|x|$

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

c) $f(x)=|x^2-4|$

d) $f(x)=|-x^2+6x-5|$

e) $f(x)=\begin{cases} |x| & se \quad x<-1 \\ x^2 & se \quad -1\le x\le 1 \\ -x+1 & se \quad x>1 \end{cases}$

f) $$f(x)=\begin{cases} x & se \quad x\le 0 \\ -x & se \quad x>0 \end{cases}$$

g) $$f(x)=\begin{cases} x+4 & se \quad x<0 \\ x^2+4 & se \quad 0\le x\le 2 \\ 8 & se \quad x>2 \end{cases}$$

6. Dicir de que tipo son as seguintes funcións e representalas graficamente:

a) $f(x)=3x$

b) $f(x)=3x+5$

c) $f(x)=x^2+6x-7$

d) $f(x)=x^2-3x$

e) $f(x)=-2x^2$

f) $f(x)=2^x$

g) $f(x)=e^x$

h) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

i) $f(x)=\log_2 x$

j) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

k) $f(x)=\ln x$

l) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

m) $f(x)=\dfrac{-5}{x}$

7. Achar a función polinómica de primeiro grao que:

a) Pasa polos puntos $(3,4)$ e $(-2,5)$.

b) Pasa polos puntos $(3,0)$ e $(0,5)$.

c) Pasa polo punto $(5,2)$ e pola orixe de coordenadas.

8. Achar a función polinómica de segundo grao que pasa polos puntos $(3,2)$, $(-1,1)$ e $(1,3)$.

9. Dadas as funcións $f_1(x)=x-1$, $f_2(x)=3^x+x$ e $f_3(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$, calcular:

a) f_1+f_2 e f_1-f_2

b) $f_1\cdot f_2$ e $\dfrac{f_1}{f_2}$

c) $3\cdot f_1$

d) $f_2\circ f_1$, $f_1\circ f_2$ e $f_2\circ f_2$

10. Sexan as funcións:

$$f(x)=\begin{cases} -x & se \quad x\le -1 \\ -2x+3 & se \quad 0\le x<3 \\ \dfrac{3}{x} & se \quad x\ge 3 \end{cases}$$ e

$$g(x)=\begin{cases} |x+1| & se \quad x\le -2 \\ x^2-1 & se \quad -1\le x<1 \\ \ln x & se \quad x>1 \end{cases}$$

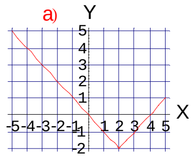
a) Achar os seus dominios.

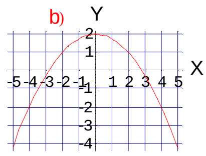
b) Representar graficamente as funcións.

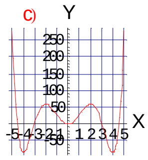
c) Estudar o crecemento e decrecemento.

d) Buscar os valores máximos e mínimos.

11. Achar os intervalos de crecemento e os extremos relativos das funcións representadas polas seguintes gráficas:







12. Estudar as simetrías das seguintes funcións:

a) $f(x)=x^2+5$

b) $f(x)=x^3+x^2$

c) $f(x)=-|x|$

d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$

e) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

f) $f(x)=\dfrac{3}{x}$

13. Utilizar a calculadora para achar os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+20}{|x|}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$

14. Calcular os seguintes límites:

a) $\lim_{x\to 1}(3x^2+4x-5)$

b) $\lim_{x\to -1}(x^5-x^4-x^3+x)$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+1}{-x^2+2}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+4}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

g) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

h) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

i) $\lim_{x\to\infty}(x^4-10x^3-5x^2)$

j) $\lim_{x\to\infty}\left(-x^3-5x^2+1\right)$

k) $\lim_{x\to -\infty}\left(5x^3+5x^2+10\right)$

l) $\lim_{x\to -\infty}(-x^4+x^3+25)$

m) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+8x}{2x^2+5x+4}$

n) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x+1}{2x^2+x-3}$

o) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+12x+10}{3x^4+2}$

p) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{x^2}-\dfrac{4}{x}\right)$

q) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

r) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

s) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+4)(x-2)}-x\right)$

t) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x+3}$

u) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{x}\right)^{x}$

v) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{6x}\right)^{3x}$

w) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{-2x+5}$

x) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{5x^3+1}{5x^3}\right)^{20x^3}$

15. Achar as asíntotas das funcións:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

d) $f(x)=e^x$

e) $f(x)=\ln x^2$

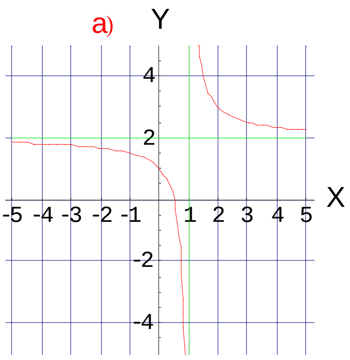
f) $f(x)=x\,e^x$

g) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x^2}$

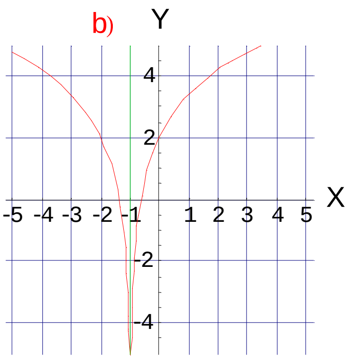
h) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

16. Determinar as ecuacións das asíntotas das funcións representadas nas seguintes gráficas:

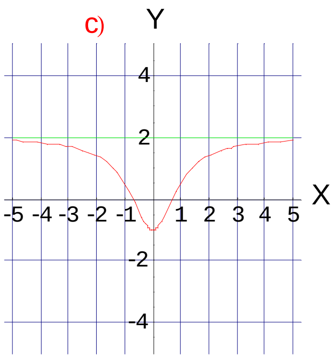
a)



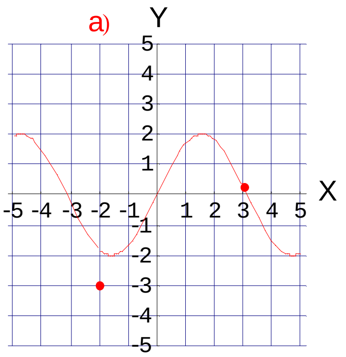
b)

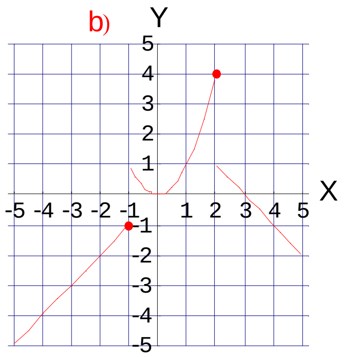


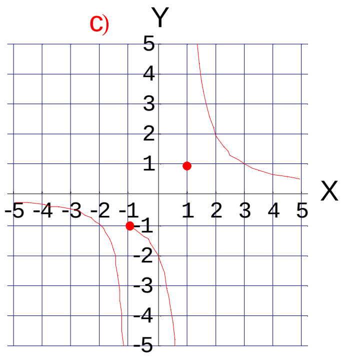
c)



17. Estudar a continuidade das funcións representadas nas seguintes gráficas:







18. Estudar a continuidade das funcións:

a) $f(x)=x^3+3x^2-x+2$

b) $f(x)=\operatorname{sen}x+3\cos x$

c) $f(x)=e^{2x+1}$

d) $f(x)=\ln(x+3)$

e) $f(x)=\sqrt{2x+8}$

f) $f(x)=\dfrac{4}{x+4}$

g) $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{x+4}$

h) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$

i) $f(x)=\begin{cases} 2 & se \quad x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & se \quad x\neq 1 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2x} & se \quad x<0 \\ x+1 & se \quad 0\leq x\leq 2 \\ 5-x & se \quad x>2 \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} |x| & se \quad x\leq -1 \\ x^2 & se \quad -1<x<1 \\ x & se \quad x>1 \end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases} x+2 & se \quad x\leq -3 \\ x^2 & se \quad -3<x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & se \quad 0<x<4 \\ 2x+2 & se \quad x>4 \end{cases}$

19. Calcular o valor de k para que a seguinte función sexa continua en $x=1$: $f(x)=\begin{cases} 2 & se \quad x\leq 1 \\ \dfrac{x}{x+k} & se \quad x>1 \end{cases}$

20. A función $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, non está definida no punto $x=3$, polo tanto non é continua en dito punto.

Calcular a para que a función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & se \quad x\neq 3 \\ a & se \quad x=3 \end{cases},$$

sexa continua en todo $\mathbb{R}$.

21. Analizar a continuidade da función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ no punto $x=1$, e calcular o límite nese punto.

22. Representar as funcións $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$ e $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, estudar a súa continuidade en $x=0$ e calcular os límites laterais nese punto..

23. Achar o valor de a e b para que a seguinte función sexa continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & se \quad x<2 \\ ax+1 & se \quad 2\leq x<5 \\ x+b & se \quad x\geq 5 \end{cases}$$

24. Dicir para que valores de x son continuas as seguintes funcións: $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-2}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1}$,

$f(x)=\sqrt{x^2-3}$, $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$,

$f(x)=\ln(x+20)$ e $f(x)=\ln\left(-x^2+16\right)$.

25. Dadas as funcións: $f(x)=\begin{cases} 0 & se \quad x<-1 \\ |x| & se \quad -1\le x\le 1 \\ 0 & se \quad x>1 \end{cases}$

e $g(x)=\begin{cases} |x+1| & se \quad x\le -2 \\ x^2-1 & se \quad -1\le x<1 \\ \ln x & se \quad x>1 \end{cases}$

a) Representar graficamente as funcións.
b) Buscar os valores máximos e mínimos.
c) Estudar o crecemento e decrecemento.
d) Estudar a continuidade.

26. Dise que unha raíz dunha ecuación foi *separada* se temos achado un intervalo (a,b) no que se atopa esta raíz e non se atopa ningunha outra. Separa as raíces das ecuacións:

a) $5x+6=0$
b) $x^2-6x-5=0$
c) $x^3+x^2-12=0$
d) $\sqrt{7x-17}=1$

27. Cal é a imaxe da función $f(x)=\cos x$ no intervalo $[0,2\pi]$? Cantos puntos x toman o valor $\frac{1}{2}$? Calcúlaos.

28. Demostrar cun exemplo que o seguinte enunciado, moi semellante ao do TVM, é falso: “Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo cerrado $[a,b]$, a función $f(x)$ toma nos puntos dese intervalo unicamente os valores intermedios entre $f(a)$ e $f(b)$”.

29. Calcular os valores dos parámetros a e b de maneira que se poda aplicar o teorema de Bolzano á función $f(x)=\begin{cases} \cos x & se \quad -\pi\le x\le 0 \\ a+x^2 & se \quad 0<x<1 \\ \dfrac{b}{x} & se \quad 1\le x\le \pi \end{cases}$. Achar o punto do intervalo $(-\pi,\pi)$ ao que fai mención dito teorema.

30. Calcular os valores de $f(x)=x^7+3x+3$ en $x=0$ e en $x=-1$, podemos deducir que a súa gráfica corta ao eixe OX nalgún punto entre -1 e 0? Por que?

31. Por que podemos asegurar que a ecuación $x^8-5x^2+3=0$ ten unha solución entre 0 e 1?

32. Pódese garantir que a ecuación $2^x-3x=0$ ten algunha solución entre 0 e 2?