EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Dicir cales das seguintes ternas de vectores de son linealmente independentes (L.I.) e cales non (L.D.). No caso de ser L.D. escribir un deles como combinación lineal dos outros:

a) $\{(1,2,3),\ (0,0,1),\ (1,0,4)\}$

b) $\{(2,1,1),\ (5,3,1),\ (3,2,0)\}$

c) $\{(1,1,1),\ (2,2,0),\ (3,0,0)\}$

d) $\{(1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$

e) $\{(1,2,1),\ (0,1,3),\ (3,4,-3)\}$

f) $\{(-1,0,0),\ (0,-1,0),\ (0,0,-1)\}$

2. Dados os vectores $\{(3,1,-2),\ (0,1,3),\ (a,2,1)\}$, achar o valor de a para que sexan L.D..

3. Calcular a e b para que o vector $(a,1,b)$ sexa combinación lineal dos vect. $(1,2,3)$ e $(-1,0,-2)$.

4. Comprobar que os vectores $\{(a,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ son L.I. para calquera valor de a distinto de cero.

5. Escribir as ecuacións vectorial, paramétricas, continua e reducida da recta que pasa polos puntos $(1,2,3)$ e $(2,1,5)$.

6. Ecuación do plano que pasa por $(0,1,1)$ e que é paralelo aos vectores $(1,2,3)$ e $(2,0,1)$.

7. Ecuación do plano paralelo a $x+y-z=0$ e que pasa por $(1,3,0)$.

8. Di cales das afirmacións son verdadeiras ou falsas:

a) Tres puntos do espazo sempre determinan un plano.

b) Unha recta e un punto exterior a ela sempre determinan un plano.

c) Dúas rectas do espazo que non teñen ningún punto en común son paralelas.

d) Catro planos non poden cortarse nun só punto.

e) Se tres planos son paralelos, a matriz ampliada dos seus coeficientes non ten ningún menor de orde 3 non nulo.

f) O sistema formado polas ecuacións implícitas de dous planos, constitúe sempre as ecuacións implícitas dunha recta.

9. Posición relativa do plano $\pi: 3x+3y-z=1$ e a recta $r: \begin{cases} x-y=1 \\ y+3z=0 \end{cases}$.

10. Posición relativa das rectas $r: \begin{cases} x-y=1 \\ y+3z=0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x+3z=1 \\ x-2y-3z=1 \end{cases}$.

11. Sexan os planos: $\pi: x+2y-z+2=0;\ \pi': x+ay-z=0$, estudar a posición relativa para os valores do parámetro $a=2,\ a=-2$.

12. Estudar, para os distintos valores do parámetro a, a posición relativa dos planos: $\begin{cases} \pi: x+y+z=0 \\ \pi': ax+2y-z+2=0 \\ \pi'': 2x+4ay-2z=0 \end{cases}$

13. Calcula os valores de x e y para que o vector $(x,y,1)$ sexa ortogonal aos vectores $(3,2,0)$ e $(2,1,-1)$.

14. Escribe os vectores de módulo 1, ortogonais a $(2,-2,3)$ e $(3,-3,2)$.

15. Valor do ángulo formado polas rectas $r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ e $s: \dfrac{x-1}{2}=y+3=z-1$.

16. Achar a para que sexan perpendiculares as rectas: $r: \begin{cases} x=1-at \\ y=-t \\ z=2+5t \end{cases}$ e $r': \dfrac{x}{6}=4y=1-z$.

17. Calcular á superficie do triángulo de vértices: $A(0,2,2),\ B(1,0,1),\ C(3,3,0)$.

18. Sexan $\vec{v}$ e $\vec{u}$ dous vectores arbitrarios, comprobar que os vectores $(\vec{v}+\vec{u})$ e $(\vec{v}\wedge\vec{u})$ son ortogonais.

19. Calcular os valores dos parámetros a e b para que o produto vectorial de: $(1,2,a)$ e $(1,a,b)$ teña a dirección do vector $(4,3,1)$.

20. Calcular a área do triángulo de vértices os puntos de intersección do plano $P: 2x+3y+4z=12$ cos eixos de coordenadas.

21. Calcular a área do triángulo de vértices: puntos de intersección do plano $P: x+2y+z=2$ cos eixos OX e OY, e coa recta que pasando pola orixe de coordenadas é perpendicular a dito plano.

22. Determinar os valores de a para que sexan dependentes os vectores $\vec{v}=(3, a, -6)$, $\vec{u}=(-2, 1, a+3)$ e $\vec{w}=(1, a+2, 4)$. Escribir $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ e $\vec{w}$, sendo a un dos valores calculados.

23. Ecuación do plano que pasa pola orixe de coordenadas, polo punto no que o eixo OZ corta ao plano $\pi: x-3y+z=6$ e polo punto de intersección das rectas $r: \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-3y+2z=1 \end{cases}$, $r': \begin{cases} 6x-4y+z=3 \\ -x-3y+8z=4 \end{cases}$.

24. Ecuación do plano que pasa polo punto $(-1, 2, 0)$ e contén á recta $r: \begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ y+3z-5=0 \end{cases}$.

25. Ecuación do plano que contén á recta $r: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{3}=z+2$ e ao punto $(0, -1, 0)$.

26. Plano que contén á recta $r: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ e que é paralelo a $\pi: x-3y+2z=2$.

27. Sexan os puntos $A(1, 2, 3)$ e $B(4, 5, a)$, achar a para que a recta AB sexa paralela ao plano $\pi: 3x+y+4z-1=0$.

28. Sexa a recta $r: \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$. Achar o valor de t para que o plano de ecuación $tx+6y+3z=k$ sexa paralelo a r. Para que valor de k o plano contén á recta?

29. Ecuación da recta que pasa por $(1, -1, 0)$ e que é paralela a $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

30. Sexan $A(1, 3, -2)$, $B(2, 5, 1)$ e $C(3, 9, 4)$. Achar a ecuación da recta que pasa por C e que é paralela a AB.

31. Sexan os planos $P: 3x-2y+4z+8=0$ e $P': x+5y-6z-6=0$, achar a recta que pasa polo punto $A(3, 5, -2)$ e é paralela aos dous planos.

32. Área do paralelogramo $ABCD$, sendo $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 3)$ e $C(-2, 0, 1)$.

33. Ecuación da recta que pasa por $(1, 1, 2)$ e é perpendicular ao plano $\pi: 2x-y-z=0$.

34. Ecuación do plano que pasa pola orixe e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

35. Distancia do punto $(1, 2, 0)$ á recta $r: \dfrac{x-1}{2}=y=z$ e ao plano $\pi: x+y+z=0$.

36. Distancia entre os planos: $\pi: x+y-z=0$ e $\pi': 2x+2y-2z=6$.

37. Distancia entre as rectas $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{4}$ e $r': x-1=y-2=z+1$.

38. Área do polígono de vértices $ABCD$, sendo $A(2, 1, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-3, 0, 0)$, $D(0, -1, 0)$.

39. Volume da pirámide de base o polígono do exercicio anterior e vértice $V(0, 0, 2)$.

40. Volume do tetraedro que forman os planos: $\begin{cases} \pi: y=0 \\ \pi': z=0 \\ \pi'': x-y=0 \\ \pi''': 3x+2y+z-15=0 \end{cases}$

41. Ángulo que forman as rectas $r: \begin{cases} x=-1-3\lambda \\ y=-2-4\lambda \\ z=1+5\lambda \end{cases}$ e $r': \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+1}{5}$.

42. Ángulo que forman os planos: $\pi: 2x-y+z-7=0$ e $\pi': x+y+2z-11=0$.

43. Ángulo que forma o plano $\pi: 2x-y+3z=9$ coa recta $r: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+1}{5}$.

44. Achar a para que sexan perpendiculares os planos: $\pi: ax-y-z=9$ e $\pi': 2x-y+3z=7$.

45. Volume do paralelepípedo determinado polos vectores: $\vec{v}=(-3, 4, 5)$, $\vec{u}=(0, 2, 5)$ e $\vec{w}=(-3, 1, 2)$.

46. Volume da pirámide de vértice a orixe de coordenadas, e base o paralelogramo *ABCD* (*B* e *C* opostos), sendo $A(2,3,1)$, $B(1,4,1)$ e $C(0,0,6)$.

47. Obter o valor de *a* para o cal os planos $\begin{cases}\pi: x+z-1=0\\ \pi': y-1=0\\ \pi'': 2x+3y+az-5=0\end{cases}$, determinan unha recta. Ángulo desta co plano $\pi: z+y=0$.

48. Determinar o ángulo α que forma o plano *OXY* coa recta, que pasando pola orixe, é perpendicular ao plano $\pi: 2x+z-2=0$.

49. Determinar a recta *r* que sendo perpendicular ao plano $\pi: x+y+2z-3=0$, pasa polo punto $P(0,1,1)$. Entre os planos que conteñen á recta, determinar un, que tamén conteña ao punto $Q(1,0,0)$. Cal é o ángulo deste plano co eixo *OZ*?

50. Considerado o plano $\pi: ax+z-2=0$.

a) Discutir, segundo os valores do parámetro *a*, a posición relativa respecto do plano *OXY*.

b) Calcular o valor ou valores de *a* para que a recta normal a π pasando pola orixe, forme co plano *OXY* un ángulo igual a $\pi/3$.

51. Discutir, segundo os valores do parámetro *m*, a posición relativa do plano $\pi: 2x+my-4z+2m=0$ e a recta *r* definida por: $x=\lambda+1,\ y=2\lambda,\ z=\lambda+1$. Calcular, se é posíbel, os valores de *m* para os cales o plano e a recta forman un ángulo igual a $\pi/3$.

52. Estúdese, para os distintos valores do parámetro *a*, a posición relativa dos planos: $\pi: ax+2y-z+2=0$ e $\pi': 2x+4ay-2z=0$.

Determinar, no caso $a=0$, a ecuación do plano que, pasando por $(1,1,1)$, é perpendicular a ambos.

53. Determinar un plano, que sendo perpendicular á recta *r* definida por: $r: \begin{cases}x=\lambda+1\\ y=\lambda+1\\ z=1\end{cases}$, pase polo punto $A(0,1,1)$. Estudar a posición de *r* respecto ao eixo *OZ*.

54. Acha as ecuacións da recta que pasa polo punto $A(1,-1,1)$ e que é paralela aos planos $\pi: 2x-3y+z=1$ e π': determinado polos puntos $B(2,0,0)$, $C(0,1,0)$ e $D(0,0,-1)$.

55. Determinar, segundo os valores de *m*, se as rectas $r: \begin{cases}2x-y+mz=1\\ x+4y+z=2\end{cases}$ e $s: \dfrac{x-1}{2}=1-y=\dfrac{z+1}{2}$ teñen algún punto en común.

56. Ecuacións da recta determinada polos planos:

π: plano que pasa polos puntos: $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$

π': plano que sendo perpendicular a π contén a recta $r: \dfrac{x-1}{2}=y-2=\dfrac{z+1}{-2}$.

57. Discutir, segundo os valores do parámetro *a*, a posición relativa dos planos: $\begin{cases}\pi: 2x+ay=0\\ \pi': x+az=a\\ \pi'': x+y+3z=5\end{cases}$

58. Calcular, en función do parámetro *a*, a posición relativa das rectas: $r: \begin{cases}x-2z=-1\\ y-az=0\end{cases}$ e $s: \begin{cases}x+y+z=1\\ x-az=1-a\end{cases}$

59. Calcula a intersección da recta $r: x-1=\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ co plano que pasa por $A(3,2,1)$ e é perpendicular a *r*.

60. Discutir, segundo os valores de *a*, a posición relativa dos planos: $\begin{cases}\pi: 3x+2y-z=1\\ \pi': 2x+3y-z=2\\ \pi'': ax+3y-2z=1\end{cases}$

61. Calcular **a** para que os planos $\begin{cases}\pi: x+3y+2z=7\\ \pi': 3x+2y-z=5\\ \pi'': x+y+az=1\end{cases}$ se corten nun único punto. Para que valor(es) de *a* non hai ningún punto común aos tres planos?

62. Ecuación do plano que pasando polos puntos $(1,-2,1)$ e $(0,1,0)$ é paralelo á recta $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2y+1}{-2}=z+1$. Calcular o seno do ángulo de incidencia do eixo *OX* con dito plano.

63. Achar o volume do tetraedro que forman os planos: $x=0;\quad y=0;\quad z=0\ \ e\ \ x+y+z=2$.

64. Expoñer algún método que permita calcular a distancia entre planos paralelos.

Calcular a distancia entre os planos $\pi: 2x+6y+4=0$ e $\pi': x+3y+4=0$.

65. Calcular o ángulo que forma a recta $r: (x, y, z) = (2, -1, -3) + \lambda(1, 6, 0)$ e o plano π que pasa polo punto $P(-2, 6, 1)$ e ten o vector característico (vector normal asociado) $\vec{v} = (1, 1, 3)$.

66. Dadas as rectas $r: (x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(k, -2, 3)$ e $s: \begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5 = 0 \\ 4x - 3y + 2z - 13 = 0 \end{cases}$. Determinar o valor de k para que r e s sexan coplanarias. Neste suposto calcula a ecuación do plano que as contén.

67. Ecuación da recta que pasa por $(1, 0, 1)$, paralela ao plano $x - 2y + 6z - 1 = 0$ e que corta á recta $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$.

68. Sexan $A(2, 3, 1)$, $B(4, 3, 1)$, $C(4, 4, 1)$ e $D(4, 4, 3)$ vértices dun paralelepípedo de arestas AB, AC e AD. Calcular as coordenadas dos restantes vértices e o volume.

69. Recta que pasa por $(1, 2, 3)$ e corta ás rectas $r: \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$ e $r': \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{4}$.

Este problema con outro punto e outras rectas pode non ter solución, poñer un exemplo.

70. Achar as coordenadas do simétrico do punto $(1, 1, 2)$ respecto:

a) da orixe de coordenadas

b) do plano: $x + y + z = 0$

c) da recta: $x + 1 = 2y + 2 = 2z$.

71. Dados catro puntos de $\mathbb{R}^3$ que condición deben cumprir para que sexan do mesmo plano (coplanarios)?

Calcular a distancia do punto $P(-1, 0, 2)$ ao plano que contén aos puntos $Q(-1, 1, 0)$, $R(0, 0, 2)$ e $S(1, -2, -2)$.

72. Dado o plano $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ con vectores directores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, que ángulo forman os vectores $\vec{w} = (a, b, c)$ e o produto vectorial de $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

73. Achar a ecuación xeral do plano π que pasa polo punto $P(3, -2, 5)$ e é perpendicular aos planos: $\pi_1: 5x - y + 2z = 2$ e $\pi_2: -2x + 4y + z = 4$.

74. Calcular os puntos da recta r que pasa polos puntos $P(-1, 2, 3)$ e $Q(3, 5, 0)$, tal que a súa distancia ao punto $C(-1, 0, 1)$ é de 12 unidades.

75. Determinar α e β para que os planos:

$\pi_1: 6x - \alpha y + 4z + 9 = 0$ e

$\pi_2: 9x - 3y + \beta z - \beta = 0$ sexan paralelos.

76. Estudar a posición relativa das rectas $r: x - 3 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

$s: (x, y, z) = (-3, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 1)$. Calcular o punto de r máis próximo á recta s.

77. Os puntos $P(3, 1, 1)$, $Q(1, 1, 0)$, $R(-3, 3, -1)$ e $S(2, 2, 1)$ son coplanarios?

78. Cal é a forma xeral dos planos paralelos ao plano OXY? (Razoar a resposta).

79. Achar a ecuación xeral do plano π que pasa por $A(1, 1, 1)$ e contén a recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

80. Achar a ecuación xeral do plano determinado polos puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$ e $C(1, -2, 0)$. Calcular o volume do tetraedro que limita cos planos cartesianos.

81. Estudar a posición relativa das rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ e $s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$, e calcular o ángulo que forman.

82. Calcular o conxunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están á mesma distancia dos puntos $P(-1, 2, 5)$ e $Q(-3, 4, 1)$. A que distancia se atopa o punto P de dito conxunto?

83. Achar o volume do tetraedro de vértices o punto $P(1, 1, 1)$ e os puntos de corte do plano $\pi:\ 2x + 3y + z - 12 = 0$ cos eixos de coordenadas. Achar tamén o punto de corte do plano π e a recta, perpendicular a π, pasando polo punto P.

84. Determinar as ecuacións vectorial, paramétricas e xeral do plano determinado polos puntos $A(1, 0, 0)$, $B(2, -1, 2)$ e $C(5, -1, 1)$. Achar a distancia do punto $P(2, 7, 3)$ ao plano.