3. SUCESIÓNS

Definición

- Unha **sucesión** numérica é un conxunto ordenado de números.
  - Exemplos:
    - 2, 4, 6, 8, 10, ...
    - 1, 4, 9, 16, 25, ...
    - 10, 14, 18, 22, 26, ...
    - 10, 20, 40, 80, 160, ...
    - −1, 2, −3, 4, −5, ...
  - Cada elemento da sucesión chámase **termo** da sucesión. Para designalos empréganse subíndices, que nos indican o lugar que ocupa cada elemento na sucesión:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \dots$$

  - Os termos das sucesións pódense determinar a partir de certo criterio. Para os exemplos anteriores:
    - Cada termo é o dobre do lugar no que se atopa.
    - Cada termo é o cadrado do lugar no que se atopa.
    - Cada termo obtense do anterior sumándolle catro.
    - Cada termo obtense do anterior multiplicándoo por dous.
    - Cada termo é lugar que ocupa con signo menos se é impar e signo máis se é par.

Termo xeral

- Chámase **termo xeral** dunha sucesión, que simbolizamos a_n, á expresión que representa un termo calquera desta.
  - Hai sucesións o termo xeral das cales é unha expresión alxébrica, que nos permite saber calquera termo da sucesión sabendo o lugar que ocupa, **n**.
  - Exemplos:
    - 2, 4, 6, 8, 10, ... $\longrightarrow a_n = 2n$
    - 1, 4, 9, 16, 25, ... $\longrightarrow a_n = n^2$
    - 10, 14, 18, 22, 26, ... $\longrightarrow a_n = 4n + 6$
    - 10, 20, 40, 80, 160, ... $\longrightarrow a_n = 10 \cdot 2^{n-1}$
    - −1, 2, −3, 4, −5, ... $\longrightarrow a_n = (-1)^n\, n$
  - Noutras, cada termo obtense a partir dos anteriores, dise que están dadas en forma recorrente. Unha **relación de recorrencia** é unha expresión alxébrica, que expresa o termo **n** en función dos anteriores.
  - Exemplo:
    - Na sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., cada termo obtense sumando os dous anteriores, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$
    - Na sucesión 1, −4, 5, −9, 14, −23, 37, ..., cada termo obtense restando os dous anteriores, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$
    - Na sucesión 10, 12, 15, 19, 24, 30, 37, ..., cada termo, a partir do segundo, obtense sumándolle ao anterior o número do lugar que ocupa, $a_n = a_{n-1} + n$

Progresións aritméticas

Definición

- Unha **progresión aritmética** é unha sucesión en que cada termo (menos o primeiro) obtense sumando ao anterior unha cantidade fixa **d**, chamada **diferenza** da progresión.
  - Exemplos:
    - 1, 3, 5, 7, 9, ...; $d = 2$
    - 5, 0, −5, −10, −15, ...; $d = -5$
  - Se $\boldsymbol{d > 0}$ a progresión é **crecente** (os termos da progresión son cada vez maiores).
  - Se $\boldsymbol{d < 0}$ a progresión é **decrecente** (os termos da progresión son cada vez menores).

Termo xeral

- O **termo xeral,** a_n, dunha progresión aritmética é:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

onde a_1 é o primeiro termo e d é a diferenza.

  - Exemplos:
    - 1, 3, 5, 7, 9, ...; $a_n = 1 + (n-1)\,2 = 2\,n - 1$
    - 5, 0, −5, −10, −15, ...; $a_n = 5 + (n-1)\,(-5) = -5\,n + 10$

Suma de n termos dunha progresión aritmética

- A **suma** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ dos n primeiros termos dunha progresión aritmética é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

  - Exemplos:
    - 1, 3, 5, 7, 9, ...; $a_{10} = 19$, $S_{10} = \dfrac{(1+19)\cdot 10}{2} = 100$
    - 5, 0, −5, −10, −15, ...; $a_{20} = -90$, $S_{20} = \dfrac{(5+90)\cdot 20}{2} = 950$

Progresións xeométricas

Definición

- Unha **progresión xeométrica** é unha sucesión en que cada termo (menos o primeiro) obtense multiplicando o anterior por cantidade fixa **r**, chamada **razón** da progresión.
  - Exemplos:
    - 1, 2, 4, 8, 16, ...; $r = 2$
    - 2, 0,2, 0,02, 0,002, 0,0002, ...; $r = \dfrac{1}{10}$
  - Se $\boldsymbol{r > 1}$ a progresión é crecente.
  - Se $\boldsymbol{0 < r < 1}$ a progresión é decrecente.
  - Se $\boldsymbol{r < 0}$ $\begin{cases} \text{Se } a_1 \text{ é positivo,} & \text{son negativos os termos pares da progresión} \\ \text{Se } a_1 \text{ é negativo,} & \text{son negativos os termos impares da progresión} \end{cases}$

Termo xeral

- O **termo xeral,** a_n, dunha progresión xeométrica é:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

onde a_1 é o primeiro termo e r é a razón.

- Exemplos:
  - $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots;\ a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$
  - $2,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{50},\ \frac{1}{500},\ \frac{1}{5000},\ \ldots;\ a_n = 2\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

Suma de n termos dunha progresión xeométrica

- A **suma** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica é:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$$

- Exemplos:
  - $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots;\ S_{10} = \dfrac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2-1} = 1023$
  - $2,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{50},\ \frac{1}{500},\ \frac{1}{5000},\ \ldots;\ S_{10} = \dfrac{2 \cdot \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{10} - 1} = 2,\ 222\,222\,222$

Produto de n termos dunha progresión xeométrica

- O **produto** $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$ dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica é:

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

- Exemplos:
  - $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots;\ P_{10} = \sqrt{(1 \cdot 2^9)^{10}} = 2^{45} = 3,\ 5184 \cdot 10^{13}$
  - $2,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{50},\ \frac{1}{500},\ \frac{1}{5000},\ \ldots;\ P_{10} = \sqrt{\left(2 \cdot 2\left(\frac{1}{10}\right)^9\right)^{10}} = 4\left(\frac{1}{10}\right)^{45} = 4 \cdot 10^{-45}$

Suma dos termos dunha progresión xeométrica con $|\,r\,| < 1$

- A **suma de todos os termos** dunha progresión xeométrica na que a razón verifica $-1 < r < 1$, é:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

- Exemplo:
  - $2,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{50},\ \frac{1}{500},\ \frac{1}{5000},\ \ldots;\ S = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{20}{9}$
  - $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}\ \ldots;\ S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

Xuro composto

- Se ao inverter un capital durante un período de tempo, t, a un rédito, r%, non se retiran os intereses ao finalizar o período de inversión senón que se engaden ao capital dicimos que é un xuro composto.
  O capital final $\boldsymbol{C_f}$ obtido ao inverter un capital $\boldsymbol{C}$, ao rédito **r %**, durante **n** anos, a **xuro composto** vén dado pola fórmula:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

    - Se o tempo vén dado en meses ou días, abonda con substituír *r* polo rédito mensual ou diario e *n* polo números de meses ou días.

  - Exemplos:
    - Un banco paga o 4,2% anual por depósitos a prazo fixo. Investimos 15 000 €. Canto diñeiro teremos ao cabo de 5 anos?

$$C_f = 15\,000 \cdot 1{,}042^5 = 18\,425{,}9 \text{ €}$$

    - Un banco paga o 4,2% anual por depósitos a prazo fixo. Investimos 15 000 €. Se o período de capitalización é mensual, canto diñeiro teremos ao cabo de 5 anos?

$$4\ \%\ \text{anual} \longrightarrow \frac{4,2}{12} = 0{,}35\ \%\ \text{mensual}$$

$$C_f = 15\,000 \cdot 1{,}0035^{5 \cdot 12} = 18\,498{,}4 \text{ €}$$