ECUACIÓNS

Definicións

ECUACIÓN: é unha igualdade entre dúas expresións alxébricas.

Exemplos: $6x+5y = 27$ $x^2 = 6x-5$

INCÓGNITA (S): letra (ou letras) que aparecen na ecuación.

SOLUCIÓN: é o valor (ou valores) da letra (ou letras) que cumpren á igualdade.

Exemplos: O 1 é unha solución da ecuación $x^2 = 6x-5$ por que: $1^2 = 6\cdot 1-5$

O 2 e o 3 son unha solución da ecuación $6x+5y = 27$ por que: $6\cdot 2+5\cdot 3 = 27$

Unha ecuación chámase compatíbel se ten algunha solución. Se non ten solución chámase incompatíbel.

Ecuacións equivalentes

Dúas **ecuacións** son **equivalentes** cando teñen a mesma solución.

Regras que nos permiten pasar dunha ecuación a outra equivalente:

Regra da suma:

Se aos dous membros dunha ecuación se lles suma ou resta o mesmo número ou unha mesma expresión alxébrica, obtense outra ecuación equivalente.

Transposición de termos: (O que suma nun membro pasa para o outro restando e viceversa)

Exemplo:

$$4x + 7 = 39$$
$$\downarrow$$
$$4x + \cancel{7 - 7} = 39 - 7$$
$$\downarrow$$
$$4x = 32$$

Directamente:

$$4x + 7 = 39$$
$$\downarrow$$
$$4x = 39 - 7$$
$$\downarrow$$
$$4x = 32$$

Regra do produto:

Se aos dous membros dunha ecuación se multiplican ou dividen por un mesmo número distinto de cero, obtense outra ecuación equivalente.

"Os números que multiplican ou dividen a todo un membro poden pasar para o outro dividindo e viceversa"

Exemplo:

$$4x = 20$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$\downarrow$$
$$x = 5$$

Directamente:

$$4x = 20$$
$$\downarrow$$
$$x = \frac{20}{4}$$
$$\downarrow$$
$$x = 5$$

Unha ecuación de segundo grao é unha igualdade alxébrica que pode expresarse na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sendo **a, b** e **c** números reais e **a ≠ 0** .

Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dise que a ecuación é completa. Se b=0 ou c=0 a ecuación é incompleta.

Exemplos: Ecuacións completas: $3x^2 - 5x + 7 = 0,\ -x^2 + 4x - 6 = 0$

Ecuacións incompletas: $2x^2 - 5x = 0,\ -3x^2 + 5 = 0,\ 2x^2 = 0$

Resolución de ecuacións de segundo grao incompletas

Ecuacións do tipo: $ax^2 = 0$

Para este tipo de ecuación basta con despexar x e obtemos a solución: $x = 0$

Exemplo

$4x^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$

Ecuacións do tipo: $ax^2 + bx = 0$

Para este tipo de ecuación basta con sacar factor común x e Igualar os dous factores a cero.

Obtemos dúas solucións: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{-b}{a}$

Exemplo

$4x^2 - 12x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x(x-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 0,\ x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0,\ x = 3$

Ecuacións do tipo: $ax^2 + c = 0$

Para este tipo de ecuación basta con despexar x^2 e facer a raíz cadrada.

Se $\frac{-c}{a} < 0$ non existe solución.

Se $\frac{-c}{a} > 0$ ten dúas solucións: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} = \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$

Exemplo

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4,\ x = -4$

$2x^2 + 32 = 0$ non ten solución porque $\frac{-c}{a} = \frac{-32}{2} = -16 < 0$

Resolución de ecuacións de segundo grao completas

Ecuacións do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$

Para resolver as ecuacións de segundo grao completas, aquelas nas que *a*, *b* e *c* son distintos de cero, utilízase a seguinte fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Exemplo

$$2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{13 \pm 3}{4} \Rightarrow$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

Discriminante dunha ecuación de 2º grao.

Chámase discriminante dunha ecuación de segundo grao $a\,x^2 + bx + c = 0$, á expresión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(Adoita designarse coa letra grega Δ, Delta)

★ Segundo sexa o signo do discriminante o número de solucións da ecuación será:

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ existen dúas solucións reais distintas.
- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ existen dúas solucións reais iguais (solución dobre).
- Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ non existe solución real.

Exemplos:

$4x^2 + 6x + 2 = 0,\ 6^2 - 4\cdot 4\cdot 2 = 4 > \ \Rightarrow \exists$ dúas solucións distintas

$4x^2 + 12x + 9 = 0,\ 12^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 0 > \ \Rightarrow \exists$ existe unha solución dobre

$3x^2 + 6x + 5 = 0,\ 6^2 - 4\cdot 3\cdot 5 = -24 > \ \Rightarrow \nexists$ solución real

Suma e produto das solucións (raíces) dunha ecuación de segundo grao

Se x_1 e x_2 son as solucións dunha ecuación de segundo grao $a\,x^2 + bx + c = 0$ verifícase:

Suma: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ Produto: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Exemplo: $3x^2 - 27x + 60 = 0$, (Solucións $x_1 = 4,\ x_2 = 5$) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-27)}{3} = 9 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{60}{3} = 20 \end{cases}$

Ecuacións bicadradas

Ás ecuacións do tipo $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$ chámaselles bicadradas.

Para resolvelas abonda con facer $\mathbf{x^2=y}$, obtendo unha ecuación de segundo grao: $\mathbf{ay^2+by+c=0}$, na que

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\begin{cases}y_1\\y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=\pm\sqrt{y_1}\\x=\pm\sqrt{y_2}\end{matrix}$$

Exemplo

$$\mathbf{x^4-5x^2+4=0}$$

$$\mathbf{x^2=y}\qquad \mathbf{y^2-5y+4=0}$$

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$$

$$y=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm2$$

$$y=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Racionais

Son ecuacións nas que a incógnita aparece no denominador.

O proceso que se ha de seguir para a súa resolución consiste en quitar en primeiro lugar os denominadores, operamos e resolvemos a ecuación resultante.

Convén comprobar que ningunha das solucións obtidas anula o denominador, xa que nese caso non sería válida.

Exemplo

$$\mathbf{x-\frac{2}{1-x}=4}$$

Quitamos denominadores :

$$x(1-x)-2=4(1-x)$$

Operamos :

$$x-x^2-2=4-4x$$

Resolvemos :

$$\mathbf{x^2-5x+6=0}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

Comprobamos as solucións:

$\mathbf{x=3}$

$\mathbf{x=2}$

Son válidas ambas as dúas

Ecuacións irracionais

Son ecuacións nas que a incógnita aparece baixo o signo radical.

Para resolvelas déixase a un lado a raíz exclusivamente e elévanse ao cadrado os dous membros. Operando chégase a unha ecuación de segundo grao que resolvemos.

Ao elevar ao cadrado adoitan introducirse solucións "estrañas" polo que cómpre comprobalas na ecuación de partida.

Exemplo

$$\mathbf{\sqrt{x-1}+x=7}$$

Deixamos a un lado a raíz:

$$\sqrt{x-1}=7-x$$

Elevamos ao cadrado:

$$(\sqrt{x-1})^2=(7-x)^2$$

$$x-1=49-14x+x^2$$

Resolvemos: $\mathbf{x^2-15x+50=0}$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225-200}}{2}=\frac{15\pm5}{2}=\begin{cases}10\\5\end{cases}$$

Comprobamos as solucións:

$x=10$ non é válida

$\mathbf{x=5}$ é a solución

Ecuacións polinómicas de grao maior que dous

As ecuacións polinómicas que teñen solucións enteiras resólvense mediante a regra de Ruffini.

Para isto hai que ter en conta que as solucións enteiras son divisores do termo independente.